Neutral Geometry

บทนำ

เรขาคณิตที่ไม่ใช่เรขาคณิตของยูคลิด(non - Euclidean) มี อนิยาม นิยาม และสัจพจน์คล้ายกันกับของยูคลิด ยกเว้น สัจพจน์ของการขนานกล่าวคือ เรขาคณิตของยูคลิด ยอมรับสัจพจน์ของการขนาน ขณะที่เรขาคณิตที่ไม่ใช่ของยูคลิด ยอมรับปฏิเสธสัจพจน์ของการเลื่อนขนาน

ทั้ง Euclidean และ non - Euclidean จะมีทฤษฎีที่ร่วมกันอยู่บางส่วน และแตกต่างกันในบางส่วน ทฤษฎีที่ร่วมกันอยู่จะเป็นทฤษฎีที่ไม่ใช่สัจพจน์ของการเลื่อนขนาน ซึ่งทฤษฎีเหล่านี้เป็นจริงทั้งใน Euclidean และ non - Euclidean geometry และเราจะเรียกเรขาคณิตที่ไม่ใช้สัจพจน์ของการขนานว่า Neutral Geometry

ทฤษฎีที่ 1 ถึง 28 ใน Book I ของ Element เป็นทฤษฎีที่ไมอาศัยสัจพจน์ของการเลื่อนขนาน ดังนั้นถือได้ว่า ทฤษฎี ที่ 1 ถึง 28 ดังกล่าวเป็นทฤษฎีบทของ neutral geometry ด้วย

ในตอนนั้นเราจะศึกษา neutral geometry ด้วยเหตุผล 2 ประการ คือ

1.การศึกษาทฤษฎีต่างๆ ของเรขาคณิตเป็นกลางจะช่วยให้เราทราบบทบาท ของสัจพจน์ของการขนาน ทั้งใน Euclidean และ non - Euclidean

2.เพื่อให้รู้ทฤษฎีต่างๆ ที่ใช้ได้ทั้งใน Euclidean และ non - Euclidean geometry

2.สัญลักษณ์และทฤษฎีเบื้องต้น

นิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงทั้งสองยาวเท่ากัน

ดังนั้น $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ก็ต่อเมื่อ AB = CD

นิยาม มุมสองมุมเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสองมีขนาดเท่ากันนั้นก็คือ $\angle ABC \cong \angle DEF$ ก็ต่อเมื่อ

$\angle ABC = \angle DEF$

นิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อ ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันเท่ากัน และมุมที่อยู่

ในลำดับเดียวกันเท่ากัน เช่น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,

$\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$, และ$\angle CAB \cong \angle FED$

ทฤษฎี 1 การเท่ากันทุกประการของ มุม ส่วนของเส้นตรง และรูปหลายเหลี่ยม เป็นความสัมพันธ์ equivalence

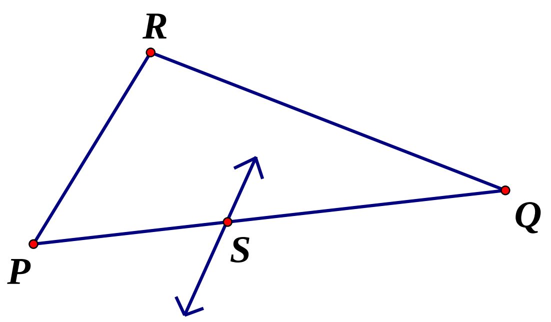
ทฤษฎีที่ 2 (i) ส่วนของเส้นตรง จะมีจุดกึ่งกลางเพียงจุดเดียวเท่านั้น

(ii) มุมจะมี เส้นแบ่งครึ่งมุมเพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีที่ 3 มุมประกอบหนึ่งมุมฉากของมุมที่เท่ากันทุกประการจะเท่ากัน

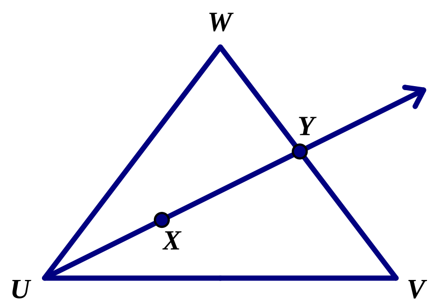
ทฤษฎีที่ 4 มุมฉากสองมุมย่อมเท่ากัน

ทฤษฎีที่ 5 (Pack' $\triangle$ Axiom) ถ้า l ตัด $\triangle PQR$ ที่จุด S ซึ่ง S อยู่ระหว่าง P และ Q แล้ว l จะตัด $\overline{PR}$ หรือ $\overline{PQ}$

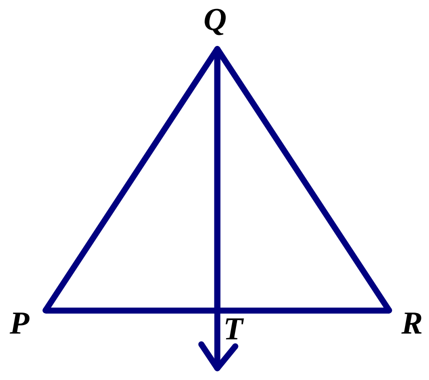


<u>พิสูจน์</u> $\because$ L ตัด $\overline{PQ}$ ที่ S P และ Q จะอยู่คนละด้านของ S สมมุติว่า L ไม่ตัด $\overline{PR}$ หรือ $\overline{RQ}$ $\therefore$P, R อยู่ด้านเดียวกันของ L และ R, Q อยู่ด้านเดียวกันของ L $\therefore$P, Q อยู่ด้านเดียวกันของ L ซึ่งขัดกับที่สรุปว่า P และ Q อยู่คนละด้านของS $\therefore$ Lตัด$\overline{PR}$หรือ$\overline{RQ}$

<u>ทฤษฎี 6</u> (The Crossbar Theorem) ถ้า X เป็นจุดภายใน ΔUVW แล้ว $\overline{UX}$ ตัด $\overline{WV}$ ที่จุด Y ซึ่ง W-Y-V (Yอยู่ระหว่างWและV)



<u>ทฤษฎี 7</u> (Isosceles Triangle Theorem) ถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันแล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองย่อมเท่ากัน



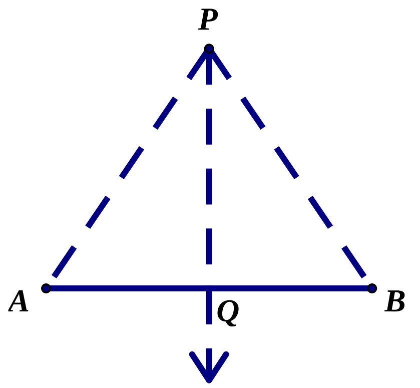
<u>พิสูจน์</u> กำหนด ΔPQRซึ่ง $\overline{PQ} \cong \overline{QP}$ ลากเส้นแบ่งครึ่ง $\angle$PQR โดย Crossbar Theorem จะได้ว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมตัด PRที่ T โดยที่ P-T-R

$\because$ $\angle$PQT $\cong$ $\angle$RQT และ QT $\cong$ QT

$\therefore$ ΔPQT $\cong$ ΔRQT (SAS)

$\therefore$ $\angle$QPT $\cong$ $\angle$QRT

ทฤษฎี 8 จุดๆหนึ่งจะอยู่บนเส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ก็ต่อเมื่อจุดนั้น มีระยะห่างจากจุดปลายทั้งสองส่วนของเส้นตรงเป็นระยะทางเท่ากัน

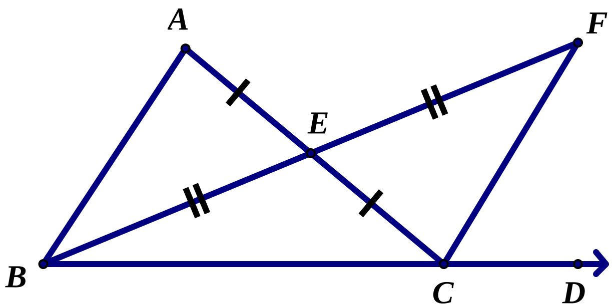


พิสูจน์ $\Leftarrow$ ให้ $\overline{PA} = \overline{PB}$ สร้างเส้นแบ่งครึ่ง∠APB และให้ตัด AB ที่ Q จะได้ว่า ∆APQ ≅ ∆BPQ $\overline{AQ} = \overline{QB}$ ∠AQP ≅ ∠BQP และเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก∠AQP เป็นมุมฉาก PQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับAB $\Rightarrow$ ให้เป็นแบบฝึกหัด

นิยาม มุมซึ่งเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก และประชิดกับมุมใดมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมเรียกว่า มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎี 9 (The Exterior Angle Theorem)

มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมย่อมใหญ่กว่ามุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด



พิสูจน์ กำหนด ∆ABC และ D อยู่บน $\overrightarrow{BC}$ ซึ่ง B-C-D เราจะแสดงว่า m∠ACD มากกว่า m∠BAC และ m∠BAC ในที่นี้จะแสดงว่า m∠ACD มากกว่า m∠BAC ส่วน m∠ACD มากกว่า m∠BAC ให้นักศึกษา

พิสูจน์เอง ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ กำหนด F บน $\overline{BE}$ ที่ทำให้ B-E-F และ $\overline{EF} \cong \overline{BE}$ จาก $\overline{FC}$

∴∆AEB ≅ ∆CEF ∴∠BAE ≅ ∠FCE ∵ Fเป็นจุดภายใน∠ACD ∴m∠ACD > m∠FCE

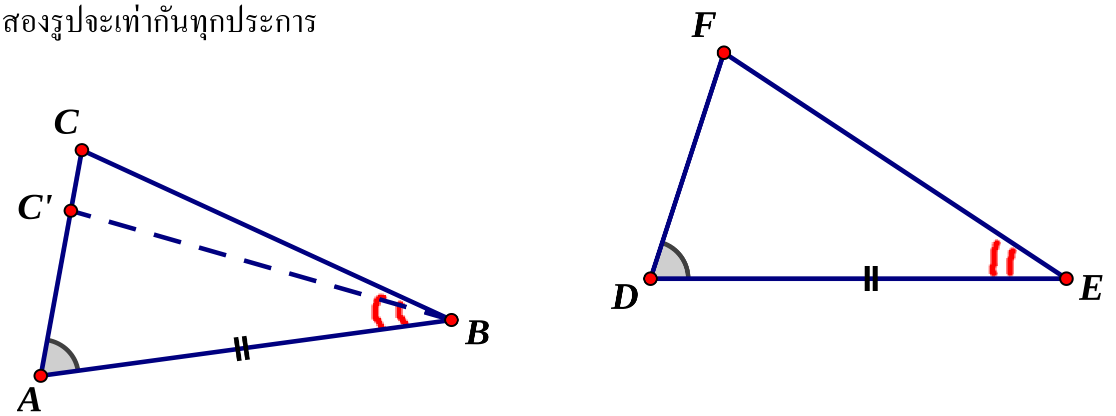
∴m∠ACD > m∠BAE

3.<u>การเท่ากันทุกประการ</u>

ในตอนนี้จะสำรวจเงื่อนไขต่างๆที่ทำให้รูปหลายเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ และจะสร้างทฤษฎีที่สำคัญๆ ในการพิสูจน์ทฤษฎีอื่นๆ ทฤษฎีบางทฤษฎีอาจเป็นที่คุ้นเคย แต่การพิสูจน์อาจไม่คุ้นเคย

<u>ทฤษฎีที่ 10</u> (ASA Triangle Congruence)

ถ้าจุดมุมของสามเหลี่ยมสองรูปสมนัยกันโดยที่มีมุมที่อยู่ในลำดับเดียวกันเท่ากันสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองเท่ากันแล้วสามเหลี่ยม ทั้งสองรูปจะเท่ากันทุกประการ



พิสูจน์ กำหนด ΔABC และ ΔDEF ซึ่งมี $\angle$CAB $\cong$ FDE , $\angle$CBA $\cong$ $\angle$FED และ $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ถ้า $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ หรือ $\overline{CB} \cong \overline{FE}$ เราจบการพิสูจน์ได้โดยใช้ SAS postulate สมมุติว่า $\overline{AC} \ncong \overline{DF}$ ให้ AC > DF $\therefore$ มี C' บน $\overline{AC}$ ที่ทำให้ $\overline{AC'} \cong \overline{DF}$ โดย SAS postulate จะได้ว่า ΔABC' $\cong$ ΔDEF $\therefore$ $\angle$ABC' $\cong$ $\angle$DEF แต่ $\angle$DEF $\cong$ $\angle$ABC $\therefore$$\angle$ABC' $\cong$ $\angle$ABC ซึ่งเป็นไปไม่ได้ $\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ และ ΔABC $\cong$ ΔDEF โดย SAS

<u>ทฤษฎีที่ 11</u> (บทกลับของ Isosceles Triangle Theorem)

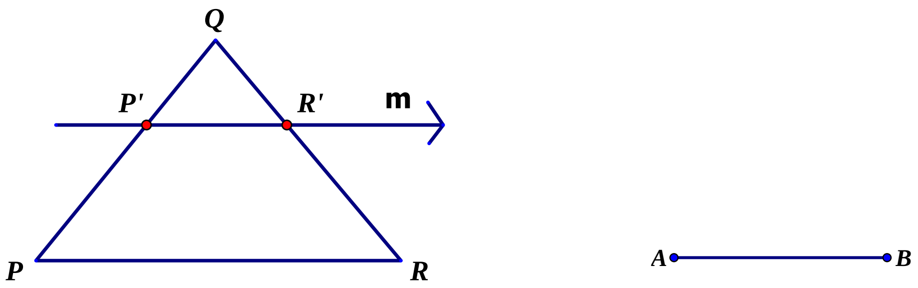
ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากัน แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมเท่ากันด้วย

<u>นิยาม</u> สามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันก็ต่อเมื่อมีมุมเท่ากัน 3 มุม และอัตราส่วนของด่านที่สมนัยกันเท่ากัน

<u>ทฤษฎีบท 26</u> P_5 สมมูลกับข้อความต่อไปนี้ (ซึ่งให้เป็นข้อความ Q)

“ กำหนด ΔPQR ใดๆ และ AB แล้วจะมี Δ ที่มีด้านๆหนึ่งยาวเท่ากับ AB และคล้ายกับ ΔPQR ”

(Wallis ‘ Postulate)



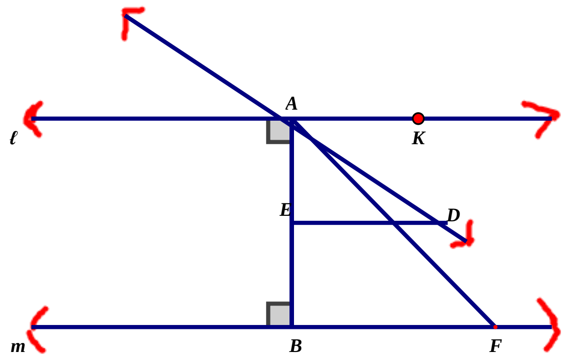
พิสูจน์ 1) จะพิสูจน์ว่า $P_5 \rightarrow Q$

ยอมรับว่า P_5 เป็นจริง กำหนด ΔPQR และ $\overline{AB}$ เราจะสร้าง Δ ให้คล้ายกับ ΔPQR และมีด้านๆหนึ่งยาวเท่ากับ $\overline{AB}$ สมมุติว่า $\overline{AB}$ ไม่ยาวเท่ากับด้านใดๆของ ΔPQR เลย (ถ้า $\overline{AB}$ เท่ากับด้านใดด้านหนึ่งของ ΔPQR การพิสูจน์เห็นได้ชัด) ให้ AB < PQ (ถ้า AB > PQ พิสูจน์คล้ายกัน) จะมี P’ บน PQ ที่ทำให้ P-P’-Q และ $\overline{P'Q} \cong AB$ โดย P_5 จะมีเพียงเส้นเดียวที่ผ่าน P’ และขนานกับ $\overline{PR}$ ให้เป็นเส้น m เส้น m จะตัด QR ให้จุดตัดเป็น R’ และจะได้ว่า $\angle QP'R \cong \angle Q\overline{PR}$ และ $\angle QR'P' \cong \angle QPR$ และเห็นได้ชัดว่า $\angle Q = \angle Q$ และจากการที่มุมทั้งสามเท่ากัน จะได้ว่า อัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันทั้งสามคู่เท่ากัน $\therefore \Delta P'R'Q \cong \Delta PRQ$

2) จะพิสูจน์ว่า $Q \rightarrow P_5$

ยอมรับว่า Wallis’ Postulate เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า P_5 เป็นจริง

ให้ m เป็นเส้น และ A เป็นจุดที่ไม่อยู่บน m จะพิสูจน์ว่ามีเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่าน A และขนานกับ m



ให้ ℓ ที่ผ่าน A และมี AB เป็นเส้นตั้งฉากร่วมกันกับ m (ℓ //m) ให้ n เป็นเส้นใดๆที่ผ่าน A แต่ n ≠ ℓ จะพิสูจน์ว่า n ตัด m

∵ n $\neq$ ℓ ให้ $\overrightarrow{AD}$ ระหว่าง $\overrightarrow{AC}$และ AB จาก $\overline{DE}$ ⊥ AB พิจารณา ΔAED และ AB โดย Wallis ' Postulate

จะได้ว่า ΔABF และคล้ายกับ ΔAED ∵ΔAED ∼ΔABF เราจะได้ว่า ∠BAF ≅ ∠EAD ∴ F ต้องอยู่บน AD หรือ n ∵∠ABF ≅ ∠AED ∴ FB จะ⊥ กับ AB ที่ B และเนื่องจาก m เป็นเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่⊥AB

และผ่าน B ∴F ต้องอยู่บน$\overrightarrow{AD}$และ m นั่นคือ n ตัด m

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิสูจน์ว่า P_5 สมมูลย์กับบทกลับของ ท.บ.21
2. จงพิสูจน์ว่า P_5 สมมูลย์กับข้อความต่อต่อไปนี้
   " ผลบวกของมุมภายในของสามเหลี่ยมเป็น 180° "

<u>The Saecheni - Legendre Theorem</u>

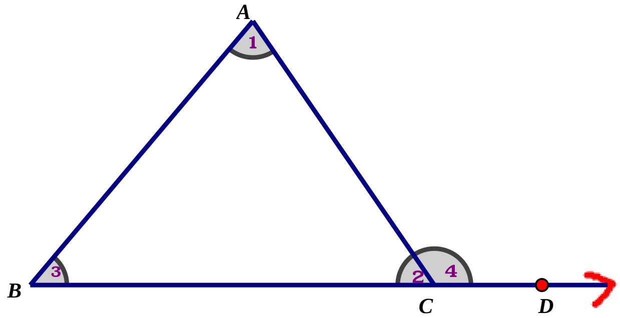
นิยาม. รูป □ ABCD ซึ่งมี m∠A = m ∠B = 90° และ AD = BC เรียกว่า สี่เหลี่ยม Saecheni $\overline{AB}$ จะเรียกว่าฐาน ∠D , ∠C เรียกว่า summit angle $\overline{DC}$ เรียกว่า ด้าน summit

ทฤษฎี 27 (Saecheni - Legendre Theorem)

“ผลบวกของมุมภายในของรูป Δ ใดๆ ย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับ 180° ”

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีนำ(Lemma) ก่อน ดังนี้

Hemma I ผลบวกของมุมภายในสองมุมของสามเหลี่ยมใดๆย่อมน้อยกว่า 180°



พิสูจน์ กำหนด Δ ABC ให้ D อยู่บน $\overrightarrow{BC}$

ที่ทำให้ B – C – D

$\therefore \angle 4$ เป็นมุมภายนอกของ Δ ABC

$\therefore m\angle 4 > m\angle 1$

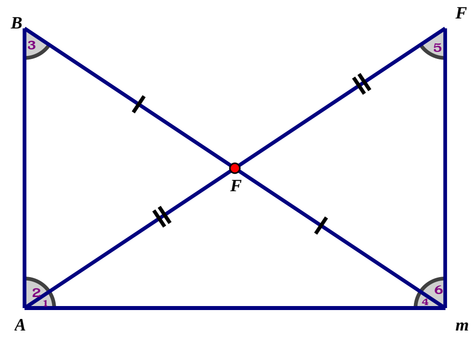
แต่ $m\angle 4 + m\angle 2 = 180^\circ$ และ $m\angle 4 = 180^\circ - m\angle 2$

$\therefore m\angle 1 \angle 180^\circ - m\angle 2$

$\therefore m\angle 1 + m\angle 2 \angle 180^\circ$ โดยทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$m\angle 2 + m\angle 3 \angle 180^\circ$ และ $m\angle 1 + m\angle 2 \angle 180^\circ$

Lemma II สำหรับ Δ ABC ใดๆ จะมี Δ A,B,C, ที่มีผลบวกของมุมภายในของ Δ ABC แต่ $\angle$ A , $\leq \frac{1}{2}$(m$\angle$ A)



พิสูจน์ พิจารณา Δ ABC โดยที่ E เป็น จุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$

กำหนดจุด F บน $\overline{AE}$ โดยที่ A – E – F ที่ทำให้

$\overline{AE} \cong \overline{EF}$ ลาก FE

เห็นได้ชัดว่า Δ AEB $\cong$ Δ CEF $\therefore \angle 2 \cong \angle 5$ และ $\angle 3 \cong \angle 6$

ให้ S (Δ ABC) แทนผลบวกของมุมภายในของ Δ ABC จะได้ว่า

S (Δ ABC) = $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4$

∵ s (Δ ABC) = m $\angle$1 + m $\angle$5 + m $\angle$6 + m $\angle$4

= s (Δ AFC)

∵ m $\angle$ A = m $\angle$1 + m $\angle$2 = m $\angle$1 + m $\angle$5

∵ m $\angle$ 1 $\leq \frac{1}{2}$m(A) หรือ m $\angle$ 5 $\leq \frac{1}{2}$m(A)

∵ Δ AFC คือ Δ A,B,C ที่ต้องการการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่27

"ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับ 180° "

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่ามี Δ ABC ซึ่งง s (Δ ABC) = 180° + b โดยที่ n > 0

โดยที่hemma II เราสามารถสร้าง Δ A,B,C ที่มี s (Δ A,B,C) = 180° + n

และ m $\angle$ A , = $\frac{1}{2}$ (m $\angle$ A) โดยใช้ hemma อีกครั้งจะได้ว่ามี Δ A_2 B_2 C_2 ที่ s (Δ A_2 B_2 C_2)= 180° = n
และ m $\angle$ A_2 = $\frac{1}{2}$(m $\angle$ A_1)

∵ m $\angle A_2 \leq \frac{1}{2}$ m $\angle A_1 \leq \frac{1}{2}$ m $\angle$ A

ถ้าดำเนินการต่อไปเช่นนี้เรื่อยๆ จะสร้าง Δ $A_{,}B_{,}C$, Δ A_2, B_2, C_2 , $\Delta A_3, B_3, C_3$,

...., Δ A_n, B_n, C_n ที่มีมุมภายในเป็น 180° + n และ m $\angle A_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (m $\angle$ A) ดังนั้นโดย A ภายให้ dean Property เมื่อ n ใหญ่มากพอจะทำให้ m $\angle A_n$ เล็กเพียงใดก็ให้ ∵ จะมี n ที่ทำให้ m $\angle A_n \leq$ n

∵ m $\angle A_n$ + m $\angle$ B_n + m $\angle$ C_n = 180° + n แต่ m $\angle A_n \leq$ n

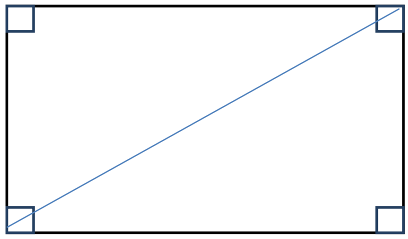
∵ m $\angle$ B_n + m $\angle C_n \geq$ 180° ซึ่งข้อกับ hemma I

∵ แต่ไม่มี Δ ABC ที่ s (ABC) = 180° + n

∵ ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมย่อมน้อยกว่าหรือเท่ากับ 180°

การหาว่ารูปสี่เหี่ยมมุมฉากมีหรือไม่

ในตอนที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงสี่เหลี่ยม Saecheri ซึ่งเป็นรูปสี่เหลียมที่มีสองด้านเท่ากัน และตั้งฉากกับด้านทั้งสามดังนี้



ส่วนของเส้นตรง AB $\cong$ ส่วนของเส้นตรง CB และ $\pm$ส่วนของเส้นตรง AB เรียกส่วนของเส้นตรง AD , CB ว่าเป็นด้านหรือขา (leg) ของรูปสี่เหลี่ยม ส่วนของเส้นตรง AB เรียกว่าฐาน ส่วนของเส้นตรง DE เรียกว่า summit และ $\angle$C และ $\angle$D เรียกว่ามุม summit

Saecheri สร้างสี่เหลี่ยมชนิดนี้ขึ้นมาเพื่อที่จะพิสูจน์ว่า มุม summit เป็นมุมฉาก ถ้าพิสูจน์ได้จริง ก็เท่ากับว่าพิสูจน์ได้ว่า “ มีสี่เหลี่ยมมุมฉาก ” เกิดขึ้นใน “Neutral Grcmetry ”เนื่องจากข้อความที่ว่า “มีสี่เหลี่ยมมุมฉาก” สมมูลกับP_5 ซึ่งเท่ากับ Saeeheni พิสูจน์ได้ว่า P_5 เป็นจริง และนี้ก็เป็นแนวทางหนึ่งที่ Saeeheni จะพิสูจน์ให้ได้ว่าP_5 เป็นจริง

ถ้าเรานิยามว่า สี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangle) คือสี่เหลี่ยมที่ที่มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ปัญหาเกิดขึ้นว่าสี่เหลี่ยมเช่นนี้มีหรือไม่ใน Neutral Ceometry ขอให้นักศึกษาทดลองสร้างดู

ทฤษฎีต่อไปนี้ 5 ทฤษฎี เกี่ยวกับสี่เหลี่ยม Saecheri การพิสูจน์ การเท่ากัน 3 ประการของรูปสามเหลี่ยมให้ศึกษาพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 28 เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูป ■ Saecheri ยาวเท่ากัน

ทฤษฎี 29 มุม summit ของ ■ Saecheri เท่ากัน

ทฤษฎี 30 มุม summit ของ ■ Saecheri ไม่เป็นมุมป้าน

ทฤษฎี 31 เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านป้านและด้าน summit จะตั้งฉากกันด้านป้านและด้าน summit

บทแทรก ด้าน summit กัน ป้าน ขนานกัน

ทฤษฎีบทที่ 32 ในสี่เหลี่ยม Saeeheri summit ยาวกว่าหรือเท่ากับฐาน

พิสูจน์ ให้☐ABCD เป็นสี่เหลี่ยม Saeeheri $\overline{AD} \cong \overline{CB}$,<A=<B=มุมฉาก ต้องการพิสูจน์ว่า AB $\leq$CD

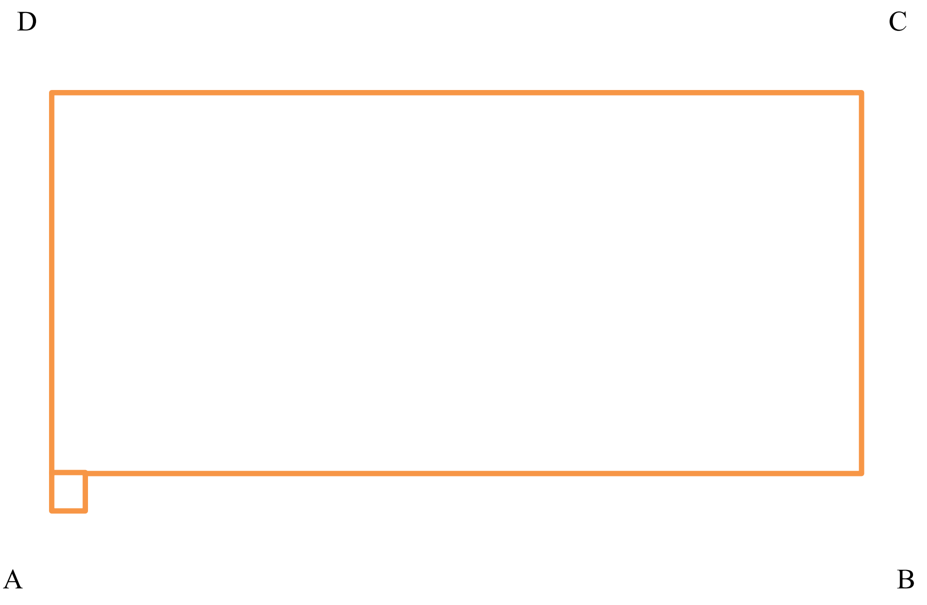
จาก +++ ถ้า <1≅<2 จะได้ว่า ΔABC≅ ΔCBD จะทำให้ AB=CD

ถ้า m <1 < m<2 โดย Hinge Theorem จะได้ว่า AB<CD

สมมติว่า m<1 > m<2 เนื่องจาก m<3 +m<2 =90○

∴m<3 +m<1 >90○ ซึ่งขัดแย้งกับ Saeeheri-Legendre

Theorem ∴ m<1≤m<2 ∴AB≤CD



Johann Lambert (1728-1777) เป็นอีกผู้หนึ่งที่พยายาม พิสูจน์ว่า P_5เป็นจริง Lambert ได้สร้างสี่เหลี่ยมขึ้นมาชนิดหนึ่งเรียกว่า สี่เหลี่ยม Lambert ซึ่งเป็นสี่เหลี่ยมที่มีมุมฉากอย่างน้อย 3 มุม ถ้าพิสูจน์ได้ว่ามุมที่จะเป็นมุมฉากก็เท่ากับพิสูจน์ได้ว่า P_5 จริง

ทฤษฎีที่ 32 มุมที่สี่ของสี่เหลี่ยม Lambert ไม่เป็นมุมป้าน

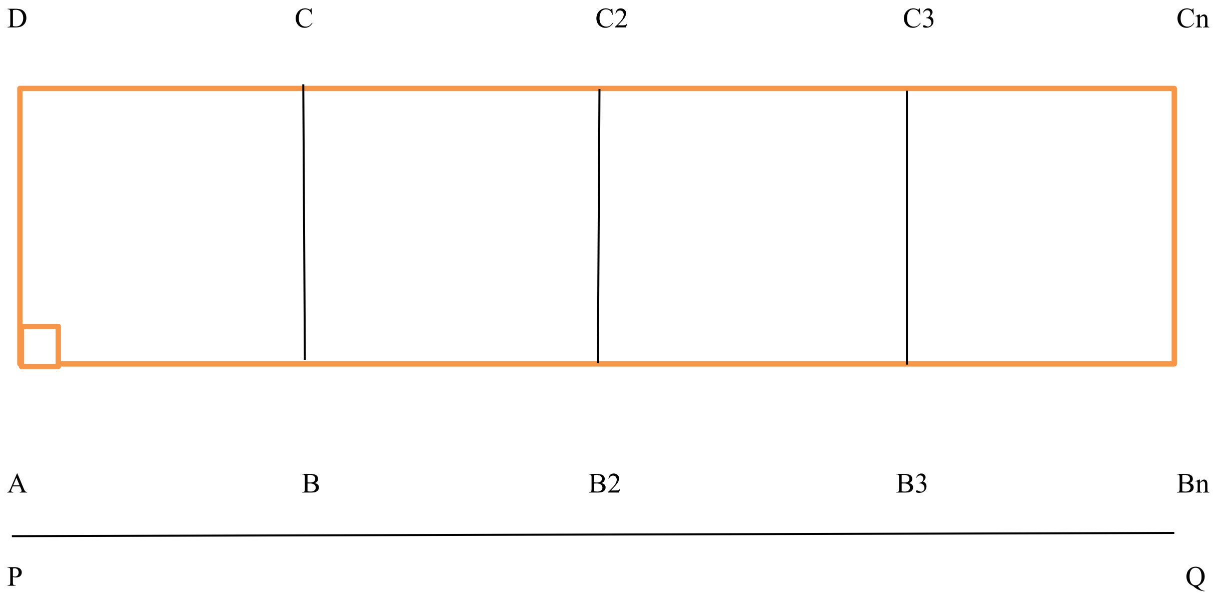
ทฤษฎีที่ 33 ด้านที่เป็นแขนของมุมฉากสองมุมสั้นกว่าด้านตรงข้าม

ทฤษฎีที่ 34เส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านฐาน และ summit ของสี่เหลี่ยม Saeeheri จะสั้นกว่าด้านตรงข้าม

เราจะเห็นว่า Lambert และ Saeehrei ประสบความสำเร็จในการกำจัดมุมป้านออกไป แต่ไม่ประสบความสำเร็จในการกำจัดมุมแหลม ทำให้ยังพิสูจน์ไม่ได้ว่ามี สี่เหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่าหนึ่งรูป ซึ่งข้อความนี้สมมูลกับ P_5 ซึ่งก็เท่ากับว่า Lambert และ Seaaheri ยังไม่ประสบความสำเร็จในการพิสูจน์ว่าP_5เป็นทฤษฎี

ทฤษฎีบทที่ 35 ถ้ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นหนึ่งรูป แล้วจะมีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านๆหนึ่งยาวมากกว่าส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

พิสูจน์ ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ $\overline{PQ}$ เป็นส่วนของเส้นตรงใดๆ จะแสดงว่าเราสามารถสร้างสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านหนึ่งยาวกว่า $\overline{PQ}$



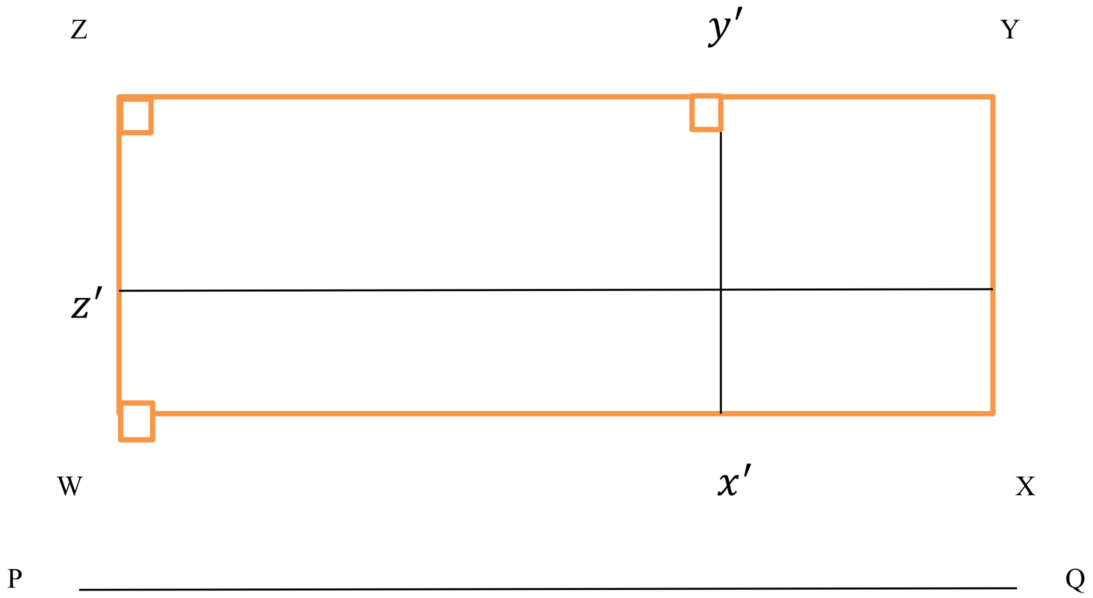
โดยการสร้างจะมี C_2 บน $\overrightarrow{DC}$ ที่ $D - C - C_2$ และ $\overline{CC_2} = \overline{DC}$ ทำนองเดียวกันจะมีB_2บน $\overrightarrow{AB}$ที่ $A - B - B_2$ และ $\overline{AB} = \overline{BB_2}$ โดยทฤษฎีSASAS

∴□AB_2Q_2Dเป็น □ มุมฉาก และ $AB_2 = 2(AB)$ โดยการสร้างทำนองเดียวกันจะมี AB_nC_nD ซึ่ง $AB_n = n_{(AB)}$ โดยสมบัติ Arehimedean จะมี n ที่ทำให้ n(AB)+PQ

บทแทรก ถ้ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นแล้วจะมีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แต่ละด้านยาวมากกว่าส่วนของเส้นตรงใดๆที่กำหนดให้ได้

ทฤษฎีบทที่ 36 ถ้ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้นแล้วจะมีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ด้านประชิดสองด้านยาวเท่ากับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{Rs}$

พิสูจน์ สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก WXYZ โดยที่ $wx > PQ$และ $wz > RS$(โดยบทแทรกทฤษฎีบทที่ 35) กำหนด xบน$\overline{wx}$ ที่ทำให้ $\overline{wx} \cong \overline{PQ}$ และจากเส้นตั้งฉาก จาก X ตัด $\overline{zy}$ ที่ y'



ได้ □ w x' y' z_1 ซึ่งเป็น□ แลมเบิร์ต (เพราะมีมุมฉาก 3มุม)

∴ $m < w\,x'\,y' \leq 90^\circ$ ถ้า $m < w\,x'\,y' < 90^\circ$ จะได้ว่า $m < x\,x'\,y' > 90^\circ$ ซึ่งชัดแย้งเพราะ □ x x' y' y เป็น□ แลมเบิร์ต เหมือนกัน มุมที่4 จะเป็นมุมป้านไม่ได้ ∴ $m < w\,x'\,y' = 90^\circ$ ∴□ w x' y' z_1

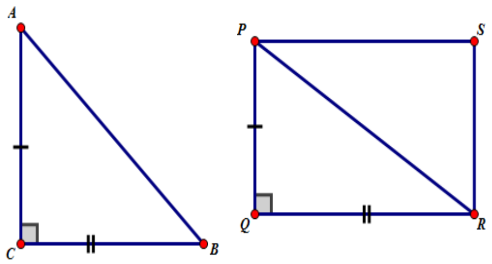
เป็น□ มุมฉากในทำนองเดียวกัน กำหนด z_1

บน$\overline{WZ}$ ให้w z'≅SR และทำ จุด z'ลากเส้นตั้งฉากกับ x' y'ที่ y' 'จะได้□ w x' y' 'z_1

ตามความต้องการ □

ทฤษฎี37 ถ้ามี □ มุมฉากเกิดขึ้นแล้ว มุมภายในของ △ มุมฉาก รวมกันจะเป็น180°

พิสูจน์



ให้△ABCเป็นมุมฉากมี C เป็นมุมฉาก สร้าง □ มุมฉากให้มีด้านยาวเท่ากัน$\overline{AC}$และ CB ตามลำดับ ให้เป็น

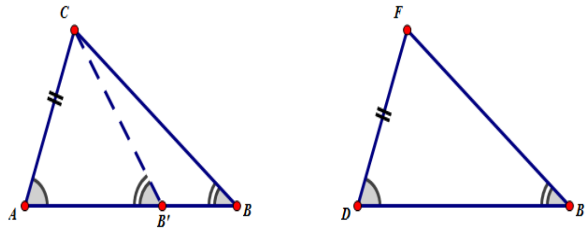
□PQRS โดยว่า $\overline{PQ} \cong \overline{AC}$, $\overline{CB} \cong \overline{QR}$ ลาก PR เห็นได้ชัดว่า △ ABC ≅ △ PQR ให้ X เป็น ผลบวกของมุมภายในของ △ PQR และ Y เป็นผลบวกของมุมภายในของ △PSR สี่เหลี่ยม PQRS เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก ∴ $X + Y = 360^\circ$ โดย saccheri legendre theorem จะได้ว่า $X \leq 180^\circ$และ $Y \leq 180^\circ$ โดยเงื่อนไข $X + Y = 360^\circ$ จะได้ว่า $X = 180^\circ, Y = 180^\circ$ ซึ่งเป็นผลตามที่ต้องการ

ทฤษฎีบท 38 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเกิดขึ้นแล้ว สามเหลี่ยมทุกรูปจะมีผลบวกของมุมภายในเป็น 180°

(การพิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบท 12 (Angle Side Side Triangle Theorem)

ถ้าจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปสมนัยกันโดยทำให้มุมที่อยู่ในลำดับเดียวกันเท่ากันสองคู่และด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมใดมุมหนึ่งในสองมุมนี้เท่ากันด้านที่ตรงข้ามกับมุมที่เท่ากันเท่ากันของสามเหลี่ยมอีกมุมหนึ่งแล้วสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



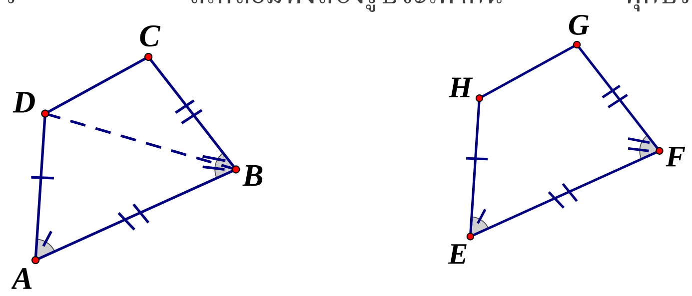
พิสูจน์ ให้$\Delta \boldsymbol{ABC}$และ$\Delta \boldsymbol{DEF}$ เป็นสามเหลี่ยมที่ $\angle \boldsymbol{CAB} \cong \angle \boldsymbol{FDE}$,$\angle \boldsymbol{CBA} \cong \angle \boldsymbol{FED}$ และ $\overline{\boldsymbol{AC}} \cong \overline{\boldsymbol{DF}}$

ถ้า $\overline{\boldsymbol{AC}} \cong \overline{\boldsymbol{DE}}$ จะได้ว่า $\Delta\ \boldsymbol{ABC} \cong \Delta\ \boldsymbol{DEF}$ โดย SAS สมมติว่า $\boldsymbol{AB} > \boldsymbol{DE}$ให้ B เป็นจุดบน $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ที่ทำให้ $\overline{\boldsymbol{A\acute{B}}} \cong \overline{\boldsymbol{DE}}$ $\therefore$ $\Delta \boldsymbol{ABC} \cong \Delta \boldsymbol{DEF}$ โดย $\boldsymbol{SAS}$ $\therefore$ $\angle \boldsymbol{ABC} \cong \angle \boldsymbol{ABC}$แต่$\angle \boldsymbol{DEF} \cong \angle \boldsymbol{ABC}$ $\therefore$ $\angle \boldsymbol{ABC} \cong \angle \boldsymbol{ABC}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ$\angle \boldsymbol{ABC}$ เป็นมุมภายนอกของ $\Delta \boldsymbol{ABC}$ $\therefore$ $\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \overline{\boldsymbol{DE}}$

$\therefore \Delta \boldsymbol{ABC} \cong \Delta \boldsymbol{DEF}$

ทฤษฎี 13 (SASAS Congruence Theorem for Quadrilateral)

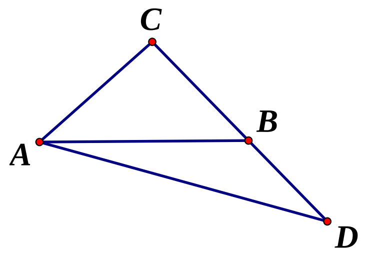
" ถ้ามุมของรูปสี่เหลี่ยมสองรูปมีความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่มีด้านเท่ากัน 3 คู่และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากัน 2 คู่แล้ว สี่เหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากัน ทุกประการ"



การพิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี14 (Inverse of the Isosceles Triangle theorem)

" ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งยาวไม่เท่ากัน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองจะไม่เท่ากันมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาวย่อมกว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามด้านสั้น''



พิสูจน์ ให้ ABC เป็น $\triangle$ ที่ $AC > BC$ $\because$ $AC > BC$ จะมีจุด D บน CB ที่ C-B-D และทำให้ $AC \cong CD$

$\therefore \angle CAD \cong \angle CDA$ แต่ $\angle ABC$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle ABC$

ดังนั้น $m\angle CBA > m\angle CDA$

เนื่องจาก B เป็นจุดภายใน $\angle CAD$ $\therefore m\angle CAB < m\angle CDA$

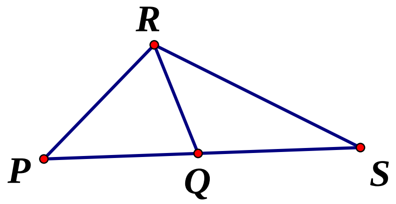
$\therefore m\angle CAB < m\angle CBA$

ทฤษฎี15 " ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไม่เท่ากันแล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ย่อมเยากว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก"

(พิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎี16 (Triangle Inequality)

“ ความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใดใดรวมกันย่อมมากกว่าความยาวของด้านที่สาม“



พิสูจน์ ให้ PQR เป็น △ ใดๆ

เราจะแสดงว่า PQ + QR > PR

ให้ S เป็นจุดบน PQ โดยที่ P-Q-S และ QS ≅ QR ดังนั้น △ROS เป็น △ หน้าจั่ว

∴∠QRS ≅ ∠QSR ∵ QS ≅ QR ∴ PQ + QS = PQ + QRเนื่องจาก Q เป็นจุดภายใน ∠PRS

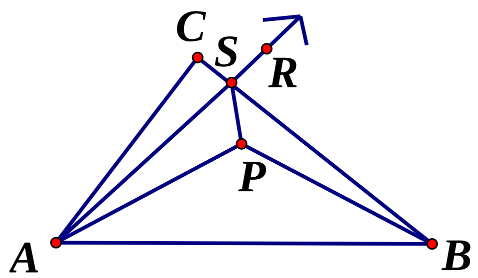
∴ m∠QRS < m∠PRS แต่ m∠PRS ≅ m∠QRS ∴m∠QRS > m∠PRS ∴ PS > PR

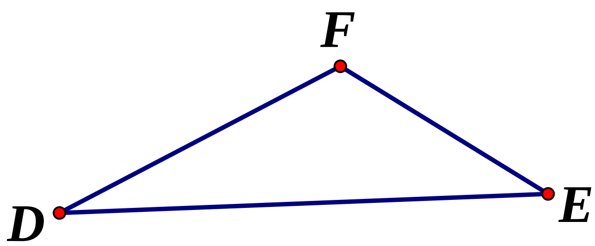
∴PQ + QS > PR หรือ PQ + QR > PR

กรณีอื่นๆพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

ทฤษฎี 17 (The hinge theorem)

“ ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันของรูปหนึ่งใหญ่กว่ามุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันของอีกรูปหนึ่งแล้วด้านที่สามของรูปที่มีมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันเป็นมุมใหญ่ย่อมยาวกว่าด้านที่สามของรูปที่มีมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันเป็นมุมเล็ก”





พิสูจน์ กำหนด△ABC และ △DEF โดยที่ AB ≅ DE , AC ≅ DF และ m∠CAB > m∠FDE

เราจะต้องพิสูจน์ว่า BC > FE ∵ m∠CAB > m∠FDE ∴จะมีจุด P ใน ∠CAB ที่ทำให้

△ABD ≅ △DEF ให้ AR ∠CAP BC S △ACS ≅ △APS ∴CS ≅ SP

∴BS + SP > BP หรือ BS +SC > BP แต่ PB ≅ EF

∴BS + SC > EF หรือ BC > EF

(พิสูจน์ให้ทำแบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบท 18 (SSS Triangle congruence Theorem)

"ถ้าจุดยอดของสามเหลี่ยมสองรูปสมนัยกัน แบบหนึ่งต่อหนึ่งโดยทำให้ความยาวของด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันเป็นคู่ๆ รวมสามคู่แล้วสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ"

(พิสูจน์ให้ทำแบบฝึกหัด)

เส้นขนาน

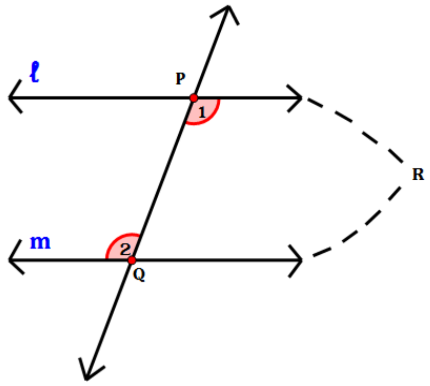
บทนิยาม เส้นสองเส้นบนระนาบขนานกันต่อเมื่อทั้งสองเส้นไม่มีจุดร่วมกัน

ทฤษฎีบท 19 “เส้นหนึ่งตัดเส้นอีกสองเส้นโดยทำให้มุมแย้งเท่ากันแล้วเส้นทั้งสองย่อมขนานกัน”

พิสูจน์ ให้ ℓ และ $\mathfrak{m}$ เป็นเส้นสองเส้นที่มี $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัดที่ P และ Q โดยทำให้ $\angle 1 \cong \angle 2$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\ell \parallel \mathfrak{m}$

สมมุติว่า $\ell \nparallel \mathfrak{m}$ ให้ ℓ และ $\mathfrak{m}$ ตัดกันที่ R



พิจารณา ΔPQR โดยทฤษฎีบท 19 ได้ว่า

$\mathfrak{m}\angle 2 > \mathfrak{m}\angle 1$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ว่า

$\mathfrak{m}\angle 2 = \mathfrak{m}\angle 1$

$\therefore \ell \parallel \mathfrak{m}$

หมายเหตุ บทกับของทฤษฎีบท 19 คือ “ถ้าเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้วมุมแย้งย่อมเท่ากัน” ไม่เป็นทฤษฎีบทใน neutral geometry เพราะการพิสูจน์ต้องอาศัยข้อความที่สมบูรณ์กับสัจพจน์ที่ 5

ทฤษฎีบท 20 เส้นสองเส้นตรงก็ขนาดกับเส้นๆหนึ่งแล้วเส้นทั้งสองย่อมขนานกัน

ทฤษฎีบท 21 เส้นหนึ่งตัดเส้นสองเส้นโดยทำให้มุมภายนอกกับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามและข้างเดียวกันของเส้นตัดแล้วสองเส้นย่อมขนานกัน

ทฤษฎีบท 22 เส้นหนึ่งตัดสองเส้น โดยทำให้มุมข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็นสองมุมฉากแล้วสองเส้นย่อมขนานกัน (ทฤษฎีบท 20 – 22 ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

เนื่องจากสัจพจน์ข้อที่ 5 ของ Euclid ยาวเข้าใจยากและไม่สะดวกในการนำไปใช้ในการพิสูจน์จึงมีผู้พยายามใช้ข้อความอื่นที่มีใจความเดียวกันแทนข้อความที่มีชื่อเสียงและใช้กันทั่วไปคือสัจพจน์ของเพลย์แฟร์ (Playfair's Axion) ซึ่งมีใจความดังนี้

"ที่จุดๆหนึ่งซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้จะมีเส้นเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดที่กำหนดให้และขนานกับเส้นที่กำหนดให้"

ทฤษฎีบท 23 สัจพจน์ข้อที่ 5 ของ Euclid สมมูลกับ Playfair's Axion

พิสูจน์ เราแบ่งการพิสูจน์เป็น2ตอน คือ

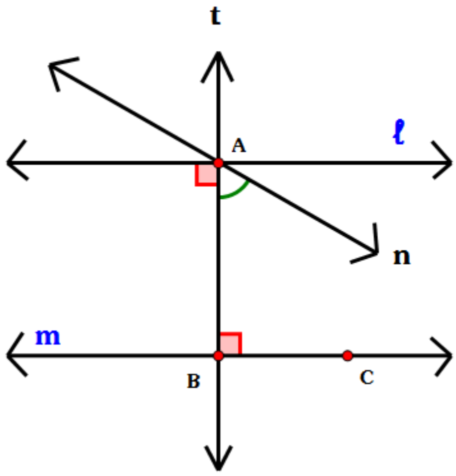
1) $P_5 \rightarrow$ Playfair's Axion
2) Playfair's Axion $\rightarrow P_5$

1) ยอมรับว่า P เป็นจริงแล้วพิสูจน์ว่า Playfair's Axion เป็นจริง ให้ A เป็นจุดที่อยู่บนเส้น m ให้ t เป็นเส้นที่ผ่าน A และ $\perp$ กับ m ตัดที่ m ที่ B ให้ ℓเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับ t ที่ $A \therefore \ell \parallel \mathrm{m}$ *(โดยทฤษฎีบท 19)* ให้ n เป็นเส้นอื่นๆที่ผ่าน A

$\therefore\ n \neq A$

จะมีมุมหนึ่งที่เกิดจาก n และ t

เป็นมุมแหลม สมมติว่าเป็น $\angle 1$



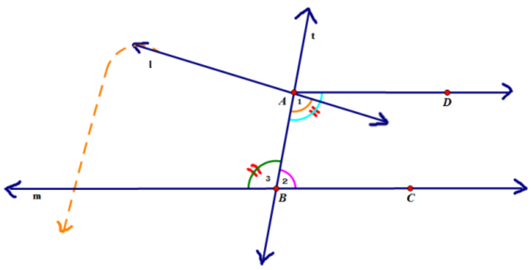
$\therefore\ \mathrm{m} < 1 + \mathrm{m}\ < ABC$ น้อยกว่าสองมุมฉาก

∴ โดย P_5 n อยู่ติดกับ m ∴ มีอย่างมากเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่าน A และขนานกับ m

∴ Playfair's Axiom เป็นจริง

$\therefore P_5 \rightarrow$ Playfair's Axiom

2) ยอมรับว่า Playfair's Axiom เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า



ให้ t ตัด l และ m โดยทำให้ $m < 1 + m < 2 < 2$มุมฉาก จะต้องแสดงว่า l ตัด m

จะต้องแสดงว่า l ตัด m ทางต้นที่มีผลบวกของมุมน้อยกว่า 2มุมฉาก

$\therefore m < 3 + m < 2 = 180^\circ$ $\therefore m < 3 > m < 1$

ที่ A สร้าง AD ที่ทำให้ $m < 3 = m < BAD$ โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้ง จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AD} \parallel m$

เนื่องจาก Playfair's Axiom เป็นจริง จะได้ว่า $l \nparallel m$ $\therefore$ l ตัดกับ m

ถ้า l *ตัดกับ* m ทางด้านซ้าย จะได้ว่า $m < 1 > m < 3$

ซึ่งขัดกับที่พิสูจน์มาแล้วว่า $m < 3 > m < 1$

$\therefore$ l ไม่ตัด m ทางด้านซ้าย

$\therefore$ l ตัด m ทางด้านขวา

$\therefore$ l ตัด m ทางด้านที่มีผลบวกของมุมน้อยกว่า 2มุมฉาก

$\therefore P_5$ เป็นจริง

$\therefore$ Playfair's Axiom $\rightarrow P_5$

ทฤษฎี 23 P_5 สมมูลกับ บทกลับของทฤษฎีที่ 19

พิสูจน์ เราต้องพิสูจน์ 2 ตอน

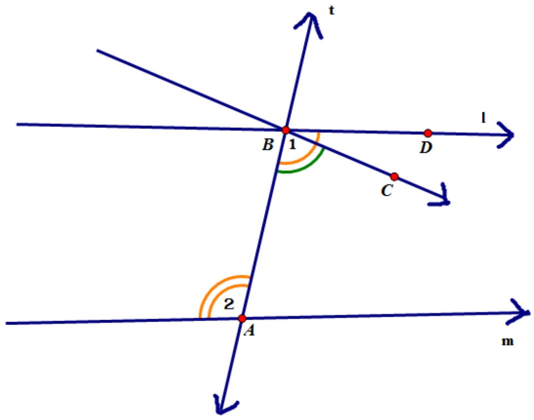
ตอนที่ 1 จะพิสูจน์ว่า $P_5 \rightarrow$ บทกลับทฤษฎีบท 19

ตอนที่ 2 จะพิสูจน์ว่า บทกลับทฤษฎี 19 $\rightarrow P_5$

จะพิสูจน์ตอนที่ 1 ตอนที่สองให้เป็นแบบฝึกหัด

ยอมรับว่า P_5 เป็นจริง จะพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

" ถ้าเส้นขนานคู่หนึ่งถูกตัดโดยเส้นๆหนึ่ง แล้วมุมแย้งจะเท่ากัน "



ให้ $\mathrm{l} \parallel \mathrm{m}$ มี t ตัด ทำให้เกิดมุมแย้ง

< 1และ < 2 สมมุติว่า $< 1 \neq$ มุม2

ให้ $\mathrm{m} < 1 > \mathrm{m} < 2$ ที่ B

สร้าง $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ทำให้ $< ABC \cong < 2$

โดยทฤษฎีบท 19 จะได้ว่า $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \parallel \mathrm{m}$

แต่ $\mathrm{mc} \neq \mathrm{l}$ ซึ่งขัดแย้งกับ P_5

$\therefore \mathrm{m} < 1 = \mathrm{m} < 2$

$\therefore < 1 \cong < 2$

ทฤษฎีที่ 24 P_5 สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

" ถ้าเส้นๆหนึ่งตัดเส้นใดเส้นหนึ่งของเส้นคู่ขนานกันแล้ว เส้นๆนั้นจะตัดอีกเส้นที่เหลือ "

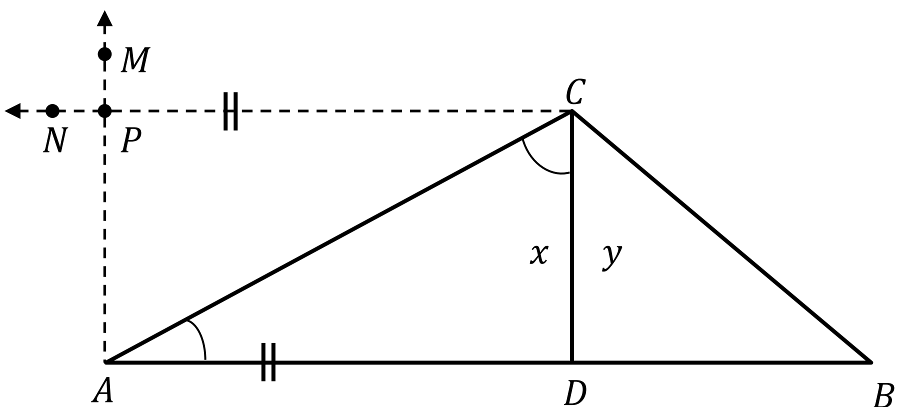
ทฤษฎีที่ 25 P_5 สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

" ถ้าเส้นๆหนึ่งตั้งฉากกับเส้นใดเส้นหนึ่งของเส้นคู่ขนานแล้ว เส้นๆนั้นจะตั้งฉากกับเส้นที่เหลือ "

(ทฤษฎี 24 และ 25 ให้เป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎี 39 ถ้ามี Δ รูปหนึ่งซึ่งมีผลบวกของมุมภายในเป็น $180°$ องศา แล้วจะมี ☐ มุมฉากเกิดขึ้น

<u>พิสูจน์</u>



ให้ ΔABC มี $m < A + m < B + m < C = 180°$

$\because$ ต้องมีอย่างน้อยสองมุมของ เป็นมุมแหลมให้เป็น $\hat{A}$ และ $\hat{B}$

$\because CD$ เป็นเส้นตั้งฉากจาก C มายัง AB ที่ D โดยทำให้ $A - D - B$

ให้ x เป็นผลบวกของมุมภายในของ ΔADC และ y เป็นผลบวกมุมภายในของ ΔDBC

เห็นได้ชัดว่า $x + y = 360°$ และ $x = 180°$

$\because \Delta ADC$ เป็น Δ มุมฉาก ซึ่งมีผลบวกของมุมภายในเป็น $180°$

สร้าง $\overrightarrow{CN}$ บน $\overline{AC}$ ที่ทำให้ $\angle ACN \cong \angle CAD$ ให้ P เป็นจุดบน $\overrightarrow{CN}$ ที่ทำให้ $\overline{CD} \cong \overline{AC}$ จะได้ว่า $\square ADCP$ เป็น $\square$ มุมฉากตามต้องการ

<u>บทแทรก</u> ถ้ามี Δ รูปหนึ่งมีมุมภายในรวมกันเป็น 180° แล้ว Δ ทุกรูปจะมี ผลบวกของวงภายในเป็น 180°

(การพิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด)

<u>บทแทรก</u> ถ้ามี Δ รูปหนึ่งซึ่งมีมุมภายในรวมกันน้อยกว่า 180° แล้ว Δ ทุกรูปจะมีผลบวกของมุมภายในน้อยกว่า 180°

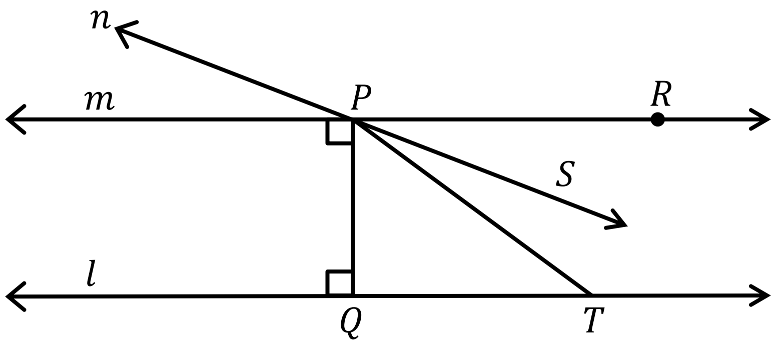
บทแทรกทั้งสองกล่าวในลักษณะ “ทั้งหมด หรือ ไม่มี”

ทฤษฎี 40 P_5 สมมูลกับข้อความ “ผลบวกของมุมภายในของ Δ ทุกรูปเป็น 180°”

<u>พิสูจน์</u> $\Rightarrow$ ให้เป็นแบบฝึกหัด

$\Leftarrow$ ยอมรับว่าผลบวกของมุมภายในของ Δ ทุกรูปเป็น 180°

จงพิสูจน์ว่า P_5 เป็นจริง



กำหนดให้ l และ P เป็นจุดที่ไม่อยู่บน l ให้ m เป็นเส้นขนานกับ l และ ผ่าน P จาก P ลาก $PQ \perp l$ ที่ Q

จะพิสูจน์ว่า n ที่ลากผ่าน P จะตัด l สมมุติว่า $n//l \because n$ ต่างจาก m

พิจารณา $\overrightarrow{PS}$ ซึ่งอยู่ระหว่าง $\overrightarrow{PR}$ และ $\overrightarrow{PQ}$ ($\therefore \angle RPS > 0$)

โดยคุณสมบัติ Archimedean

ของจำนวนจริง เลือกจุด T บน l ซึ่งอยู่ข้างเดียวกันกับ $\overleftrightarrow{Pl}$ R และ S ที่ทำให้

$m \angle QT \angle m \angle SPR$

$\because \overrightarrow{PS}$ เป็นแขนที่อยู่ภายใน $\angle QRS$

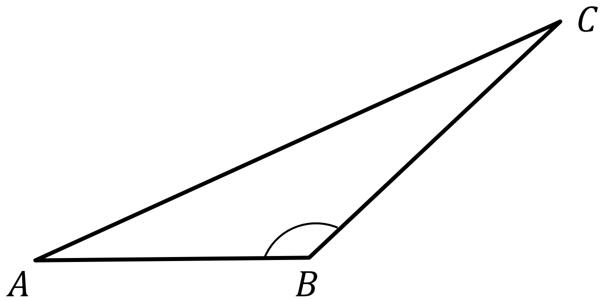
$\therefore m \angle TPQ \angle m \angle SPQ$

$\therefore m \angle TPQ + m \angle QTP \angle m \angle SPQ \; m \angle SPR = 90°$

$\therefore$ ผลบวกของมุมภายในของ ΔPQT จะน้อยกว่า ซึ่งขัดกับที่กำหนดให้ n ตัด l

$\therefore$ P_5 เป็นจริง

ทฤษฎี 15 (หน้า 7) ให้ ΔADC มี $m\hat{B} > m\hat{A}$ จงพิสูจน์ $Ac > Bc$



<u>พิสูจน์</u>

สมมุติว่า $Ac = Bc$

$\therefore$ มี $m\hat{B} = m\hat{A}$ (ทฤษฎี 7)

ซึ่งขัดกับที่กำหนดให้ $\therefore Ac > Bc$ เป็นไปไม่ได้

สมมุติว่า $Ac < Bc$

$\therefore$ มี $m\hat{A} > m\hat{B}$ (ทฤษฎี 14)

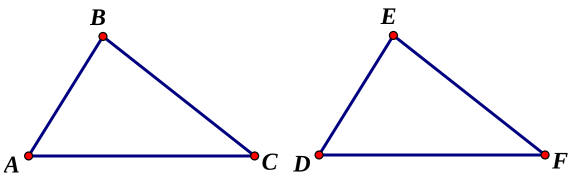
ซึ่งขัดกับที่กำหนดให้ $\therefore Ac < Bc$ เป็นไปไม่ได้

$\therefore Ac > Bc$

<u>ท.บ.18</u> ให้ △ABC และ △DEF มี

AB=DE , BC=EF แล

CD=FD



จะพิสูจน์ △ABC≅ △DEF

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า $m\widehat{\mathrm{B}} > m\widehat{\mathrm{E}}$

∴ AC=DF (ท.บ. 17) ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ขุดกับที่กำหนด

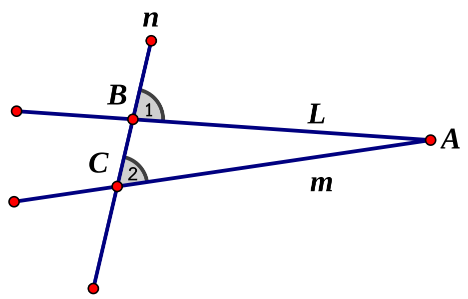
$\therefore m\widehat{\mathrm{B}} \not> m\widehat{\mathrm{E}}$

ในทำนองเดียวกับ $m\widehat{\mathrm{E}} \not> m\widehat{\mathrm{B}}$

$\therefore m\widehat{\mathrm{B}} = m\widehat{\mathrm{E}}$

∴ △ABC ≅ △DEF โดย SAS potulate

<u>ท.บ.21</u>



ให้ n ตัด L และ m โดยทำให้

$m\widehat{1} = m\widehat{2}$ จะพิสูจน์ L // m

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า L ตัด m ที่ A

ใน △ABC จะได้ว่า $m\widehat{1} > m\widehat{2}$ (ท.บ. 17)

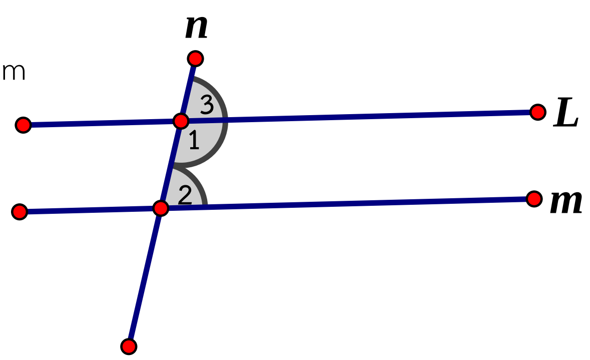
ซึ่งขัดกับที่กำหนดให้ ∴ L ไม่ตัด m

∴ L // m

<u>ท.บ.22</u>

ให้ n ตัด L และ m โดยทำให้

$m\widehat{1} + m\widehat{2} = 180°$ จะพิสูจน์ L // m



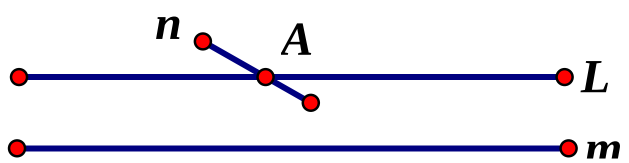
<u>พิสูจน์</u> $\therefore m\hat{1} + m\hat{2} = 180°$

แต่ $m\hat{1} + m\hat{3} = 180°$

$\therefore \; m\hat{2} = m\hat{3}$

$\therefore$ L // m โดย ท.บ.21

<u>ท.บ.24</u>

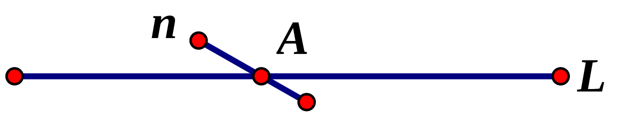


ให้ n ตัด L ที่ A โดยที่ L // m จะพิสูจน์ n ตัด m

<u>พิสูจน์</u> ถ้า n ไม่ตัด m จะขัดกับ playfair’s Axiom ซึ่งสมมูลกับ P_5

แต่เขายอมรับว่า P_5 เป็นจริง $\therefore$ playfair’s Axiom เป็นจริงด้วย

∴ n ตัด m



ให้ m เป็นเส้นที่ไม่อยู่บน m

L เป็นเส้นที่ผ่าน p และขนานกับ m

จะพิสูจน์ L เป็นเส้นเดียวที่ผ่าน P และขนานกับ m

พิสูจน์ ให้ n เป็นเส้นอีกเส้นหนึ่งที่ผ่าน P โดยสิ่งที่กำหนด

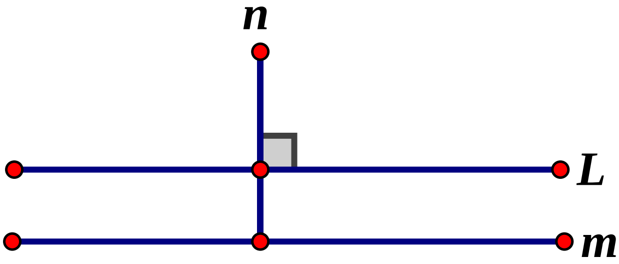
ให้จะได้ว่า n ตัด m ∴ L เป็นเส้นเดียวที่ผ่าน P และ

ขนานกับ m ∴ P_5 เป็นจริง

ท.บ.25

ให้ L // m และ n ⊥ L

จะพิสูจน์ว่า n ⊥ m



พิสูจน์ โดย ท.บ.24 เมื่อต่อ n ออกมาจะตัดกับ m

ถ้า n $\not\perp$ m จะได้ว่าผลบอกของมุมภายในข้างเส้นเดียวกันของ

เส้นตัดข้างใดข้างหนึ่งรวมกันได้น้อยกว่า$180°$ซึ่งโดย P_5 จะได้

ว่า L $\not\perp$ m ซึ่งขัดกับที่กำหนดให้ ∴ ไม่จริงที่ n $\not\perp$ m

$\therefore n \perp m$