แบบรูปของพัฒนาการทางความคิดในวิชาเรขาคณิต

(The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought)

ผ.ศ. ดร. สุพจน์ ไชยสังข์ นักวิชาการอิสระ

Supc5987@hotmail.com 081-4800-821

แบบรูปของพัฒนาการทางความคิดในวิชาเรขาคณิตเป็นผลงานของนักคณิตศาสตรศึกษาสองสามีภรรยา คือ Dina van Hiele - Geldof และ Pierre Marie van Hiele โดยที่ทั้งสองพยายามหาคำตอบว่าทำไมผลสัมฤทธิ์ของการเรียนในวิชาเรขาคณิตต่ำ นักเรียนไม่เข้าใจเนื้อหาและพิสูจน์ได้ไม่ดี แบบรูปของ แวนฮีลี เป็นที่ยอมรับกันว่าสามารถใช้เป็นแนวทางในการสอน และการประเมินความสามารถของนักเรียนในวิชาเรขาคณิตได้ดี

แบบรูปนี้เป็นผลมาจากวิทยานิพนธ์ในระดับปริญญาเอกที่เสนอต่อมหาวิทยาลัยยูเทรค (Utrecht) ประเทศเนเธอร์แลนด์ ในปี ค.ศ. 1957 โดยที่ Pierre ได้วิจัยทางด้านทฤษฎีของพัฒนาการทางความคิด ส่วน Dina ได้ศึกษาทางด้านการหาวิธีสอนเพื่อยกระดับความคิดจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่ง หลังจากการเสนอวิทยานิพนธ์ได้ไม่นาน Dina ได้เสียชีวิต Pierre จึงได้พัฒนาทฤษฎีต่อไป

ประเทศสหภาพสาธารณรัฐสังคมนิยมโซเวียต ได้สนใจงานวิจัยนี้ จึงวิจัยซ้ำเพื่อทดสอบความถูกต้อง(validate) และศึกษารายละเอียดเพิ่มเติม โดยพิกาโลและสโตลยา (Pyshkalo and Stolyar) จากสถาบันด้านการสอนของโซเวียต (Soviet Academy of Pedagogical Science) เป็นผู้วิจัย และประเทศสหภาพสาธารณรัฐสังคมนิยมโซเวียต ได้ปรับปรุงหลักสูตรเรขาคณิตอย่างได้ผลดีในช่วงปี ค.ศ. 1960 – 1969 งานของแวนฮีลีได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตรศึกษาในสหรัฐอเมริกา เนื่องจากบทความของ Izaak Wirszup (1976) ชื่อ “ Breakthoughs in Psychology of Learning and Teaching Geometry “ และจากผลงานชิ้นประวัติศาสตร์ ของอาจารย์ของแวนฮีลีจากมหาวิทยาลัยยูเทรค คือ ศาสตราจารย์ Hans Freudenthal ในหนังสือชื่อ Mathematies as an Educational Task จากนั้นจึงมีการศึกษาวิจัยแบบรูปนี้อย่างจริงจัง มีงานวิจัยออกมามากมาย และทฤษฎีมีความชัดเจนมากขึ้น แบบรูปของพัฒนาการทางความคิดในวิชาเรขาคณิตประกอบด้วย

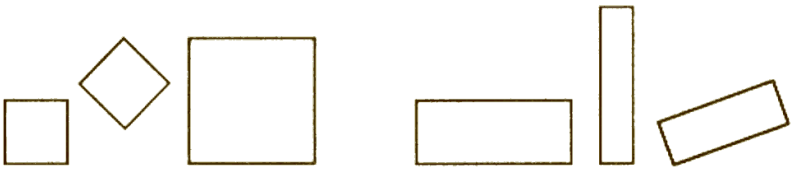
1. แบบรูป (The Model)
2. สมบัติของแบบรูป (Properties of the model)
3. ขั้นต่างๆของการเรียนรู้ (Phases of Learning)

แบบรูป (The Model)

แบบรูปของพัฒนาการทางความคิดในวิชาเรขาคณิตของ แวนฮีลี ประกอบด้วยระดับความคิดทางเรขาคณิต รวม 5 ระดับ จากระดับ 0 ถึงระดับ 4 ดังนี้

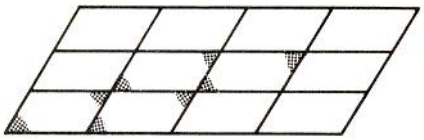
ระดับ 0 การเห็นภาพ (Visualization)

ในระดับนี้ผู้เรียนรับรู้ว่าอวกาศ (space) เป็นสิ่งที่อยู่รอบตัว มโนทัศน์ทางเรขาคณิตต่างๆจะรับรู้ในลักษณะภาพรวมมากกว่าแยกส่วน หรือลักษณะ เช่น รูปทางเรขาคณิตจะรับรู้ทั้งรูป ไม่แยกเป็นส่วนๆ เป็น ด้าน มุม หรือสมบัติของรูป ผู้ที่มีความคิดในระดับนี้สามารถเรียนคำศัพท์ทางเรขาคณิตบอกชื่อรูปได้ เมื่อให้ดูรูปจะสร้างรูปบนกระดานตะปู หรือวาดรูปคร่าวๆได้ เมื่อให้รูป สี่เหลี่ยมจัตุรัส และ สี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปข้างล่าง สามารถบอกได้ว่ารูปใดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะมีลักษณะคล้ายรูปที่เคยเห็นมาก่อน แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีมุมฉากสี่มุม หรือด้านตรงข้ามขนานกัน



ระดับ 1 การวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้ ผู้เรียนเริ่มมีการวิเคราะห์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เช่น จากการสังเกต จากการทดลอง ผู้เรียนเริ่มสนใจเกี่ยวกับลักษณะต่างๆของรูป สมบัติต่างๆที่ค่อยๆก่อตัวนี้ ทำให้สามารถแยกรูปชนิดต่างๆได้ จะมองรูปทางเรขาคณิตแบบแยกส่วนได้ จะบอกได้ว่าเป็นรูปใดโดยดูจากส่วนต่างๆของรูป เช่น เมื่อให้ดูรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป สามารถระบายสีมุมที่เท่ากันได้ บอกได้ว่ามุมตรงข้ามเท่ากัน สามารถบอกลักษณะทั่วไปของสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ ยังไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติได้ ยังไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปหนึ่งกับอีกรูปหนึ่ง และยังไม่เข้าในบทนิยาม



ระดับ 2 การอนุมานอย่างไม่เป็นทางการ (Informal Deduction)

ในระดับนี้ ผู้เรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของรูปได้ ทั้งภายในรูป(เช่น ในรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่ มุมตรงข้ามจะเท่ากัน) และระหว่างรูป (เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีสมบัติต่างๆของสี่เหลี่ยมมุมฉากครบ) ดังนั้นนักเรียนสามารถสรุปสมบัติต่างๆของรูปได้ และแยกรูปเป็นกลุ่มๆได้ตามสมบัติ สามารถเข้าใจสิ่งที่เรียกว่า class inclusion ได้ เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่าทุกรูปเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สามารถเข้าใจนิยามได้เป็นอย่างดี สามารถติดตามการให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการ (Informal Argument) ได้ และสามารถให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการได้ อย่างไรก็ดีผู้เรียนในระดับนี้ยังไม่เข้าใจการอนุมาน (Deduction) โดยรวมได้ทั้งหมด ไม่เข้าใจบทบาทของสัจพจน์ ไม่เข้าในว่าการให้เหตุผลอาจสับเปลี่ยนแนวทางได้ และไม่เข้าใจการพิสูจน์ที่เริ่มต้นจากสิ่งที่กำหนดให้ที่แตกต่างออกไปหรือไม่คุ้นเคย

ระดับ 3 การอนุมาน (Deduction)

ในระดับนี้ผู้เรียนเข้าใจบทบาทของการอนุมานว่าเป็นหนทางในการสร้างทฤษฎีต่างๆทางเรขาคณิต ตามกรอบของระบบสัจพจน์ ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง อนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎี และการพิสูจน์ ผู้เรียนไม่เพียงแต่จดจำการพิสูจน์ แต่ยังพิสูจน์เป็น เห็นความเป็นไปได้ที่จะหาวิธีพิสูจน์มากกว่า 1 วิธี เข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient condition) เข้าใจความแตกต่างระหว่างทฤษฎีและบทกลับ

ระดับ 4 ความชัดแจ้ง (Rigor)

ในระดับนี้ผู้เรียนสามรถเข้าใจและสามารถเปรียบเทียบระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกันได้ เข้าใจ non – Euclidean geometries สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรมได้

ระดับที่ 4 นี้ เป็นระดับที่ได้รับการพัฒนาจาก แวนฮีลี น้อยที่สุด จากการสนทนาเป็นส่วนตัวกับ Alan Hoffer เมื่อ 25 ก.พ. ค.ศ.1985 P.M. van Hiele กล่าวว่าเขาสนใจในระดับ 0 ถึงระดับ 3 เพราะเรขาคณิตในโรงเรียน จะสอนถึงระดับที่ 3 เท่านั้น

สมบัติของแบบรูป (Properties of the Model)

นอกเหนือจากการค้นพบลักษณะพฤติกรรมในแต่ละระดับของแบบรูปแล้ว แวนฮีลี ยังได้พบสมบัติบางประการของแบบรูปอีกดังนี้

1. **การมีลำดับ** (Sequential) ผู้เรียนจะพัฒนาไปตามระดับความคิด ผู้ที่มีระดับความคิดที่ n จะต้องมีระดับความคิดที่ n –1 มาก่อน ไม่ข้ามระดับ
2. **ความก้าวหน้า** (Advancement) ความก้าวหน้าหรือไม่ก้าวหน้า จากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งขึ้นอยู่กับการเลือกเนื้อหา การจัดวางลำดับของเนื้อหา และวิธีสอนที่ได้รับมากกว่าอายุที่มากขึ้น ไม่มีวิธีการสอนใดที่ทำให้นักเรียนพัฒนาข้ามระดับได้ (skip) แต่จะเป็นวิธีสอนที่ทำให้นักเรียนพัฒนาไปตามลำดับของระดับความคิด บางวิธีสอนทำให้นักเรียนก้าวหน้าขึ้น ในขณะที่บางวิธีสอนถ่วงความก้าวหน้า (retard) หรือไม่สร้างความก้าวหน้าเลย
3. **สิ่งที่เกิดขึ้นภายในและสิ่งที่เกิดขึ้นภายนอก** (Intrinsic and Extrinsic) สิ่งซึ่งไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะชัดแจ้งในระดับต่อไป เช่น ในระดับ 0 ผู้เรียนรับรู้โดยพิจารณาจากรูปร่าง การกำหนดรูปจากสมบัติยังไม่ชัดเจนจนกว่าจะมีระดับความคิดอยู่ในระดับ 1 ซึ่งจะมีการวิเคราะห์รูปองค์ประกอบและสมบัติ
4. **การมีภาษาประจำระดับ** (Linguistics) แต่ละระดับมีภาษาเป็นของตนเองที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์สิ่งต่างๆเข้าด้วยกัน ความสัมพันธ์ที่ถือว่าถูกต้องที่ระดับหนึ่ง อาจถูกขยาย ณ ที่อีกระดับหนึ่ง เช่น รูปหนึ่งๆ อาจมีชื่อเรียกได้มากกว่า 1 ชื่อ (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอาจเรียกได้ว่าเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก) ผู้ที่อยู่ที่ระดับ 1 จะไม่เข้าใจลักษณะที่เรียกว่า class inclusion เช่นนี้
5. **การไม่เข้ากัน** (Mismatch) ผู้เรียนที่มีระดับความคิดอันใดอันหนึ่ง แต่การสอนเป็นการสอนให้แก่ผู้ที่มีระดับความคิดที่สูงกว่า ผู้เรียนจะไม่เข้าใจ ไม่เกิดการเรียนรู้ที่ถูกต้อง และไม่สามารถติดตามกระบวนการคิดที่สอนอยู่

ขั้นตอนต่างๆของการเรียนรู้ (Phases of Learning)

จากงานวิจัยของแวนฮีลี กล่าวว่าการยกระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่ง ขึ้นอยู่กับการสอนมากกว่าอายุ (ที่จริง Pierre ยอมรับพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget แต่ผู้ที่เรียนเรขาคณิตจะเข้าสู่ระดับ concrete และ formal operation stage แล้ว) ดังนั้น วิธีการสอนและการวางลำดับการสอน เนื้อหา วัสดุอุปกรณ์ที่ใช้จึงมีความสำคัญ เพื่อตอบคำถาม

เกี่ยวกับการสอนเพื่อยกระดับความคิด ไดนาจึงได้ทำการวิจัยด้านการหาวิธีการสอนเพื่อยกระดับความคิดจากระดับ 1 สู่ระดับ 2 และได้สรุปเป็น 5 ขั้น (Phase) ในที่นี้จะใช้กิจกรรมที่เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นตัวอย่าง

Phase 1 (Inquiry / Information)

ขั้นนี้ครูและนักเรียนสนทนา และทำกิจกรรมร่วมกันเกี่ยวกับสิ่งที่จะเรียน ระดับนี้ มีการสังเกต ทบทวนมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้อง ถาม – ตอบ เช่น รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใช่หรือไม่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนใช่หรือไม่ ทำไมนักเรียนจึงกล่าวเช่นนั้น เป็นต้น จุดมุ่งหมายของกิจกรรมในขั้นนี้คือ

1. เพื่อให้ครูรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียนของนักเรียน
2. นักเรียนได้รู้ตัวว่าจะเรียนหัวข้อใดและแนวทางของการเรียนในหัวข้อนี้เป็นอย่างไร

Phase 2 (Directed Orientation)

ขั้นนี้นักเรียนเริ่มศึกษาหัวข้อที่จะเรียนจากเอกสารหรือกิจกรรมที่ครูได้จจัดลำดับไว้เป็นตอนๆ กิจกรรมเหล่านี้จะแสดงให้นักเรียนเห็นถึงลักษณะและโครงสร้างของสิ่งที่จะเรียนในระดับนี้ ดังนั้น เนื้อหาและกิจกรรมจะสั้นๆ เพื่อให้นักเรียนตอบคำถามเฉพาะอย่างไป เช่น ครูให้นักเรียนใช้กระดานตะปู เพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีเส้นทแยงมุมเท่ากัน สร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่ลักษณะดังกล่าวแต่เล็กกว่า ใหญ่กว่า สร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีมุมฉากสี่มุม มีมุมฉากสามมุม สองมุม หรือหนึ่งมุม เป็นต้น

Phase 3 (Explication)

จากประสบการณ์ในตอนที่แล้วนักเรียนจะสามารถแสดงความคิดเห็นและแลกเปลี่ยนความคิดหรือความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ที่ได้จากการสังเกต บทบาทของครูจะน้อยลงในขั้นนี้ เว้นแต่จะช่วยให้นักเรียนใช้ภาษาได้ถูกต้องเหมาะสม ในตอนนี้ระบบความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆจะเกิดขึ้นและค่อยๆชัดขึ้น ในกรณีของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนนักเรียนจะสามารถอภิปรายกันเองหรือกับครูว่าเป็นรูปใด มีสมบัติใด ความสัมพันธ์เป็นอย่างไร สังเกตได้จากการทำกิจกรรม

Phase 4 (Free Orientation)

ในขั้นนี้ครูจะให้นักเรียนทำกิจกรรมหรืองานที่ซับซ้อนมากขึ้น เป็นกิจกรรมที่มีหลายขั้นตอน ทำได้หลายวิธี และบางครั้งเป็นกิจกรรมปลายเปิด (open – ended task) นักเรียนต้องสร้างหรือหาวิธีการเอาเอง นักเรียนจะได้ประสบการณ์ในการหาวิธีการของตนเองที่จะทำงานให้เสร็จ การทำเช่นนี้ชักนำไปสู่การสำรวจ (investigation) และทำให้ความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆที่เรียนชัดเจนมากขึ้นอย่างเห็นได้ชัด เช่น กิจกรรมให้นักเรียนพับครึ่งกระดาษแผ่นหนึ่งแล้วพับครึ่งอีกครั้งหนึ่ง แล้วตัดมุมดังรูป

ให้นักเรียนจิตนาการก่อนตัดว่าเมื่อคลี่กระดาษแล้วจะได้รูปใด ให้อธิบายคำตอบ จะได้รูปใด ถ้าตัดเป็นมุม 30° 45° เส้นมุมของทะแยงมุมของรูปที่ตัดออกมาจะเป็นอย่างไร จุดตัดกันของเส้นทแยงมุมจะอยู่ที่ใด ทำไมพื้นที่ของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจึงเป็นครึ่งหนึ่งของผลคูณของเส้นทแยงมุม

Phase 5 (Integration)

ในขั้นนี้นักเรียนจะทบทวนและสรุปสิ่งได้ที่เรียนมาแล้ว เพื่อให้เห็นภาพรวมของเครือข่ายของความสัมพันธ์ของสิ่งที่เรียนไปแล้ว ครูมีหน้าที่ช่วยในการสังเคราะห์เพิ่มเติมภาพรวมที่ได้เรียนไปแล้วให้ สังเกตว่าในขั้นนี้จะไม่มีการเสนอสิ่งใหม่ๆ จะมีการสรุปความเป็นมาของสมบัติเหล่านั้น

เมื่อจบขั้นที่ 5 นักเรียนจะมีระดับการคิดขึ้นไปสู่ขั้นใหม่ ระดับการคิดใหม่จะไปปรับระดับความคิดเดิม นักเรียนก็พร้อมที่จะรับประสบการณ์เพื่อก้าวไปสู่ระดับความคิดในขั้นถัดไป

References

National Council of Teachers of Mathematics. *Learning and teaching Geometry, K-12, 1987 yearbook*, Reston, Va, : National Council of Teachers of Mathematics,1987.