

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 5]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วีดีโอ

Systems of Linear Equations in n Variables

A linear equation in n variables is an equation that can be written in the form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

where $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ and b are real numbers and $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ are variables

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |

Windows taskbar: 9:34 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 6]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วีดีโอ

Systems of Linear Equation in Two Variables

A systems of linear equations in two variables has the form

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{where } a_1, b_1 \text{ are both non-zero}$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{and } a_2, b_2 \text{ are both non-zero}$$

Ex The following are some examples.

$$3x - y = 0 \quad 8x - 2y = 5 \quad -2x + 6y = 3$$
$$5x + 2y = 22, \quad -12x + 3y = 7, \quad 4x - 12y = -6$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |

Windows taskbar: 9:34 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 7]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Deffinition of systems of equation

Two or more equation considered simultaneously from a system of equations.

Deffinition of a solution

A solution of a system of two linear equations in two variables is an ordered pair (a,b) that both equations of the system.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:35
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 8]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Solution ผลเฉลย

Solution set เซตผลเฉลย

บทนิยาม

จำนวน $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ เรียกว่าเป็น ผลเฉลย (Solution) ของสมการเชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ เมื่อแทนค่า $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$ แล้วทำให้สมการเป็นจริง และเซตของผลเฉลยของสมการเชิงเส้นนี้เรียกว่า เซตผลเฉลย (Solution set)

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:35
20/9/2566

Example 1 Solve the following system of linear equations using elimination method

$$3x - y = 0 \quad \dots (1)$$

$$5x + 2y = 22 \quad \dots (2)$$

Solution 1

We will eliminate y from the equations and solve for x.

$$3x - y = 0 \quad \dots (1)$$

$$5x + 2y = 22 \quad \dots (2)$$

$$2x(1); \quad 6x - 2y = 0 \quad \dots (3)$$

$$(2)+(3); \quad 11x = 22$$

$$x = \frac{22}{11} = 2$$

From (1); substitute $x=2$

$$3(2) - y = 0$$

$$y = 6$$

The solution of system is the order pair $(x,y) = (2,6)$
or The solution set is $\{(2, 6)\}$

Example 1 Solve the following system of linear equations

$$3x - y = 0$$

$$5x + 2y = 22$$

Solution 2

$$3x - y = 0 \quad \dots (1)$$

$$5x + 2y = 22 \quad \dots (2)$$

From(1); $y = 3x$

substitute $y = 3x$ into (2)

$$5x + 2(3x) = 22$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

substitute $x = 2$ into equation (1)

$$3(2) - y = 0$$

$$y = 6$$

The solution set is $\{(2, 6)\}$

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 11]
แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Example 2 Solve the following system of linear equations

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \dots (1) \\ -12x + 3y &= 7 \dots (2) \\ 3x(1); \quad 24x - 6y &= 15 \dots (3) \\ 2x(2); \quad -24x + 6y &= 14 \dots (4) \\ (3)+(4); \quad 0 &= 29 \end{aligned}$$

The resulting false statement indicates that there is no solution of the system of equations.

Therefore, the solution set is the empty set, and the system is inconsistent.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | ⌂ ⌃ ⌄

EN 9:36 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 12]
แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Example 3 Solve the following system of linear equations

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 3 \\ 4x - 12y &= -6 \end{aligned}$$

Solution

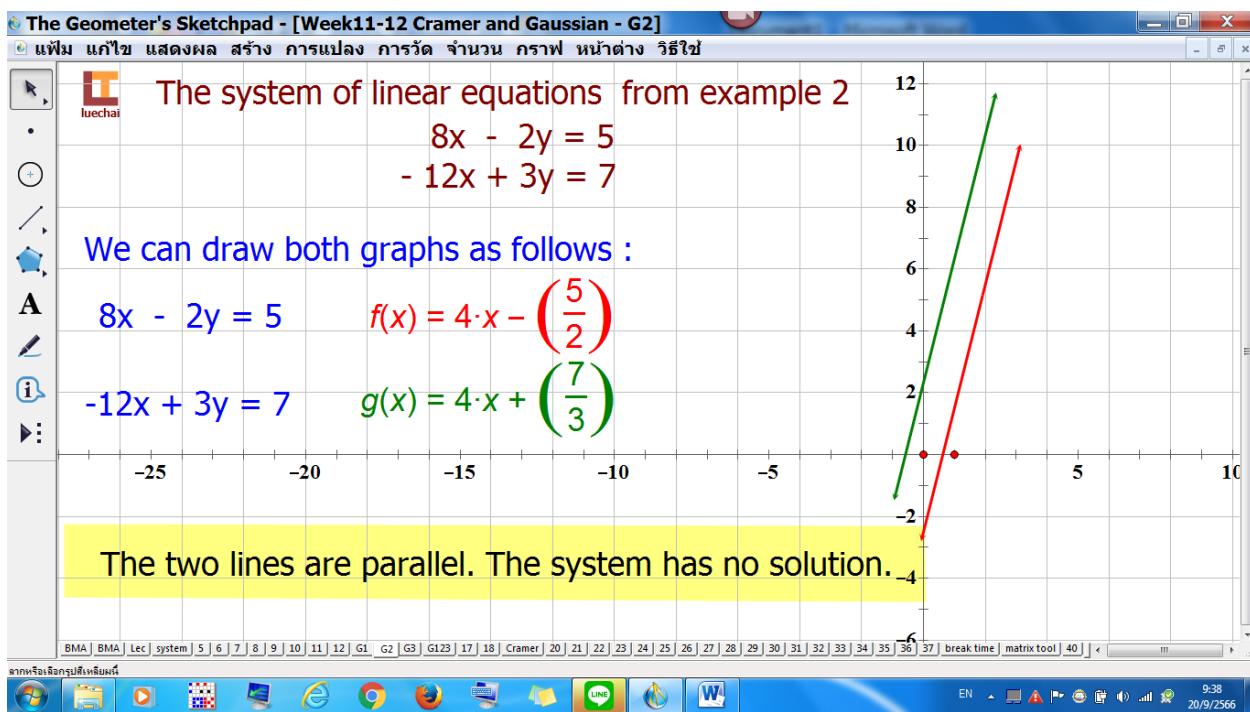
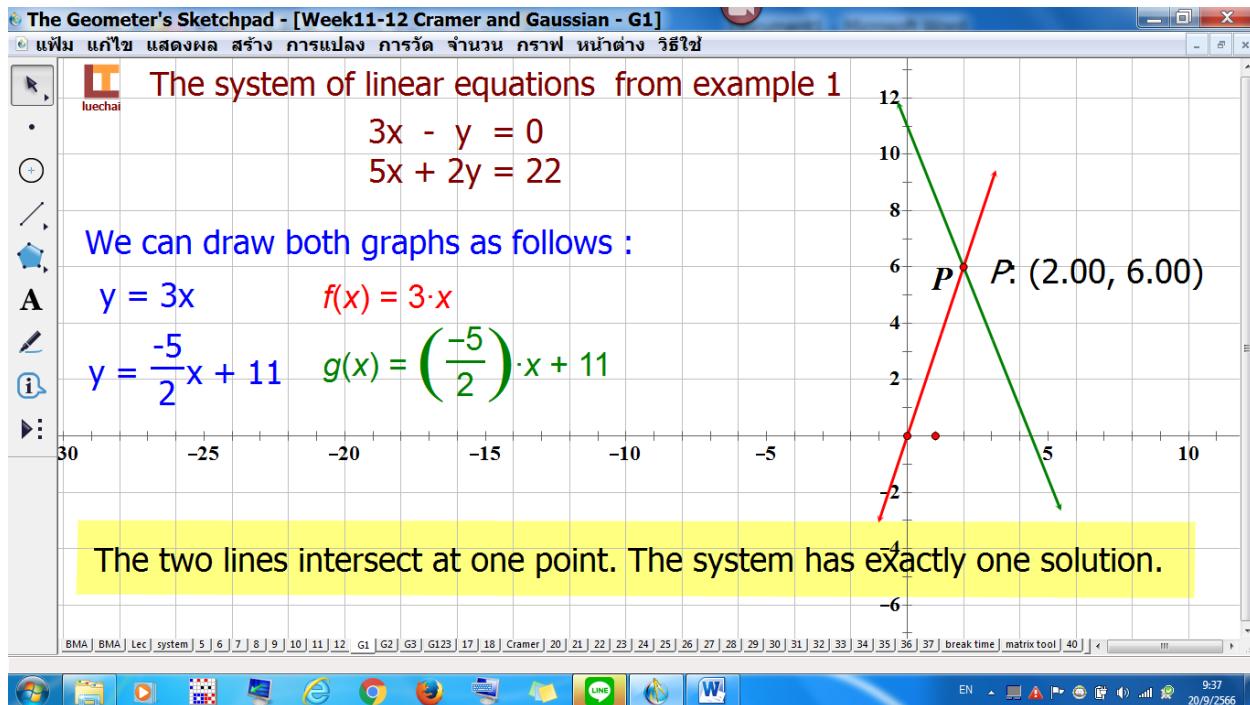
$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 3 \dots (1) \\ 4x - 12y &= -6 \dots (2) \\ 2x(1); \quad -4x + 12y &= 6 \dots (3) \\ (2)+(3); \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Since the two equations are exactly the same. Therefore, the lines coincide; we can conclude that every point on the line is a solution of the system.

Therefore, the system has infinitely many solutions.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | ⌂ ⌃ ⌄

EN 9:37 20/9/2566



The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - G3]

แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

The system of linear equations from example 3

$$-2x + 6y = 3$$

$$4x - 12y = -6$$

We can draw both graphs as follows :

$$f(x) = \left(\frac{2}{6}\right)x + \left(\frac{3}{6}\right)$$

$$g(x) = \left(\frac{4}{12}\right)x + \left(\frac{6}{12}\right)$$

The two lines are identical. The system has infinitely many solutions.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |



The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - G123]

แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

$f(x) = 3 \cdot x$

$$g(x) = \left(\frac{-5}{2}\right)x + 11$$

Intersecting lines,
Unique solution

$f(x) = 4 \cdot x - \left(\frac{5}{2}\right)$

$$g(x) = 4 \cdot x + \left(\frac{7}{3}\right)$$

Parallel lines,
No solution

$f(x) = \left(\frac{2}{6}\right)x + \left(\frac{3}{6}\right)$

$$g(x) = \left(\frac{4}{12}\right)x + \left(\frac{6}{12}\right)$$

Two lines that coincide,
Infinitely many solutions

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |



The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 17]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Systems of Linear Equations in Three or more Variables

Example Solve the following system of linear equations.

Solution

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 10 \\ y + 3z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

sustitute $z=3$ into (2)

$$y + 3(3) = 4 \rightarrow y = -5$$

sustitute $y=-5$ and $z=3$ into (1)

$$x - 2(-5) + 3(3) = 10 \rightarrow x = -9$$

The solution is $x=-9, y=-5$ and $z=3$

which can be written as the ordered triple $(-9, -5, 3)$

or The solution set is $\{(-9, -5, 3)\}$

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 18]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Systems of Linear Equations in Three or more Variables

Example Solve the following system of linear equations.

Solution

$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11 \\ 2x - 3y + 2z &= 9 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

Using elimination to solve a sistem

The solution set is $\{(2, -3, -2)\}$

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - Cramer]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Cramer's Rule for Solving a System of Linear Equations

Cramer's Rule named after Gabriel Cramer (1704 - 1752).

This rule use determinants to write the solution of a sistem of linear equations.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

EN 9:40 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 20]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

For a system of equations written in general form, the following notation is use in connection with Cramer's Rule.

1. For a system of equations

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

the solution is given by

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

coefficient matrix

M coe xy

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

EN 9:42 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 21]

แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Example

Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

$$1. \quad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

Solution

We find the determinant of the coefficient matrix.

$$\left| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{array} \right| = 3(2) - 5(-1) = 6 + 5 = 11 \quad \text{determinant is not zero}$$

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 22 & 2 \end{array} \right|}{11} = \frac{22}{11} = 2, \quad y = \frac{\left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 5 & 22 \end{array} \right|}{11} = \frac{66}{11} = 6$$

Therefore, the solution is (2,6)

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |

EN | 9:42 | 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 22]

แบบ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

2.
$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} 8 & -2 \\ -12 & 3 \end{array} \right| = 8(3) - (-12)(-2) = 0$$

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{array} \right|}{0} = \frac{29}{0}, \quad y = \frac{\left| \begin{array}{cc} 8 & 5 \\ -12 & 7 \end{array} \right|}{0} = \frac{116}{0} \quad \text{no definition}$$

The system has no solution.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | > |

EN | 9:43 | 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 23]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

ลูกชิ้น

3. $-2x + 6y = 3$
 $4x - 12y = -6$

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (-2)(-12) - 4(6) = 24 - 24 = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}$$

The system has infinitely many solutions.

BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | >

9:44
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 24]

แท็บ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

ลูกชิ้น

Exercises

Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

1. $-x + 2y = 2$
 $3x + y = 15$

3. $3x + 2y = 2$
 $6x + 4y = 14$

2. $x - 3y = 5$
 $-2x + 6y = -10$

4. $3x - 2y = 6$
 $-6x + 4y = -12$

BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 | < | >

9:45
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 25]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีไข้

luechai

2. For a sistem of equations

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

The determinant of the coefficient matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D, D \neq 0$$

$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:45
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 26]

ไฟล์ แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีไข้

luechai

Example

Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

$$4x + y - 3z = 11$$

$$2x - 3y + 2z = 9$$

$$x + y + z = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 11 & -3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

The solution set is $\{(2, -3, -2)\}$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:46
20/9/2566