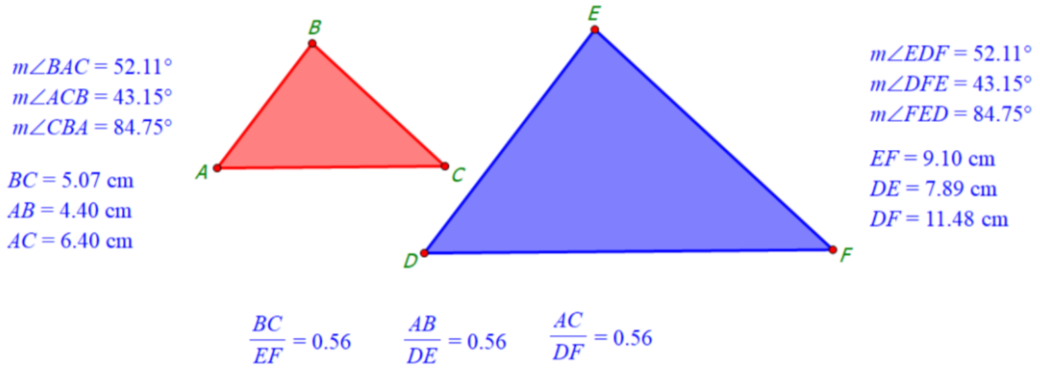
โปรแกรม GeoGebra กับการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้าย (AA, SAS, SSS)

รูปสามเหลี่ยมคล้าย

รูปสามเหลี่ยมคล้าย คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันสามคู่ และอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน

จงพิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF



รูปที่ 1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากรูป ΔABC และ ΔDEF มีมุมเท่ากันสามคู่

$\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$ และ $\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันมีค่าเท่ากัน คือ 0.56

ดังนั้น ΔABC และ ΔDEF เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

ตัวอย่างการสร้างรูปดังกล่าวเป็นการสร้างรูปโดยใช้โปรแกรม Geometer's Sketchpad (GSP) สำหรับการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งใช้งานได้ฟรีและสามารถรองรับกับการทำงานบนแพลตฟอร์มอื่น ๆ ได้ชัดเจนและสะดวก จากลิ้งค์ https://www.geogebra.org/ แล้วเลือกรายการ Geometry

การสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้าย

นิยามของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่เกี่ยวข้องกับมุมและด้านมีดังนี้

1) รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันจะมีมุมเท่ากันสามคู่
2) อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน

คำว่า “ด้านคู่ที่สมนัยกัน” หมายถึง ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากัน

การสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายจะมีวิธีสร้างได้ด้วยกรณีต่อไปนี้

1) สร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีมุมเท่ากัน 2 คู่ แล้วมุมที่เหลือจะเท่ากัน เพราะมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ $180°$

2) สร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีมุมเท่ากัน 1 คู่ และให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันนี้มีค่าเท่ากัน

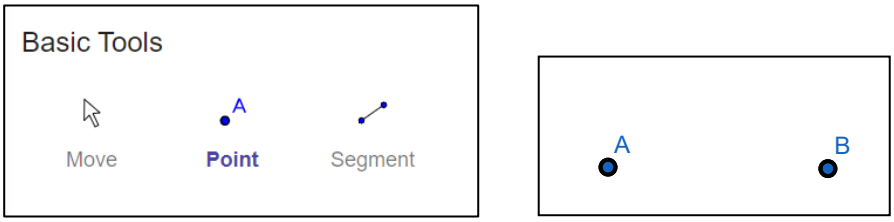
3) สร้างรูปสามเหลี่ยมให้ด้าน 3 ด้านที่สมนัยกันมีอัตราส่วนของความยาวเท่ากัน

กรณีที่ 1 การสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากัน 2 คู่

วิธีสร้าง

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการสร้างรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก และมุมอีกมุมหนึ่งมีขนาด $60°$ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการกำหนดมุมที่เป็นมุมชนิดอื่น ๆ ได้

1) สร้างจุด A และ จุด B โดยใช้คำสั่ง Point ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Basic Tools แล้วคลิกเมาส์ในบริเวณที่จะสร้างรูปทีละ 1 จุด ดังรูปที่ 2

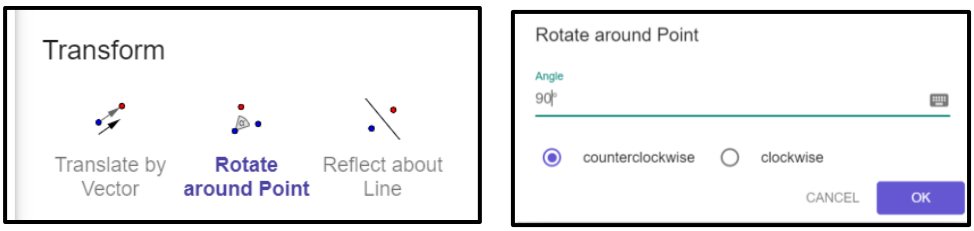


รูปที่ 2 สร้างจุด 2 จุด โดยใช้คำสั่ง Point

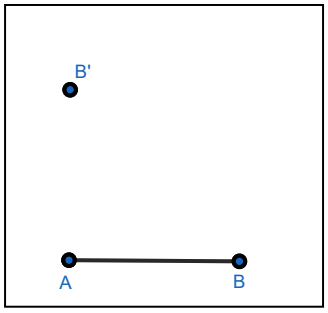
2) สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A และ จุด B โดยใช้คำสั่ง Segment ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Basic Tools โดยใช้เมาส์คลิกที่จุดทั้งสอง ซึ่งจะได้ส่วนของเส้นตรง AB ที่เป็นด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3 สร้างส่วนของเส้นตรงโดยใช้คำสั่ง Segment

3) สร้างมุมที่จุด A ให้มีขนาด $90°$ โดยใช้คำสั่ง Rotate around Point ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Transform นำเมาส์ไปคลิกที่จุด B แล้วคลิกที่จุด A ที่จะเป็นจุดยอดมุม เมื่อคลิกแล้วจะมีกล่องโต้ตอบให้ระบุขนาดของมุม ซึ่งจะต้องเปลี่ยนขนาดของมุม $90°$ ในกล่องข้อความจาก $45°$ เป็น $90°$ และเลือกทิศทางการหมุนของมุม ในตัวอย่างนี้จะเลือกปุ่ม Counterclockwise ซึ่งเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 4 (ก) เมื่อกดปุ่ม OK เพื่อยืนยันการเลือกแล้วจะปรากฏจุด B' ที่เป็นภาพฉายของจุด B หลังการหมุน ดังรูปที่ 4 (ข)



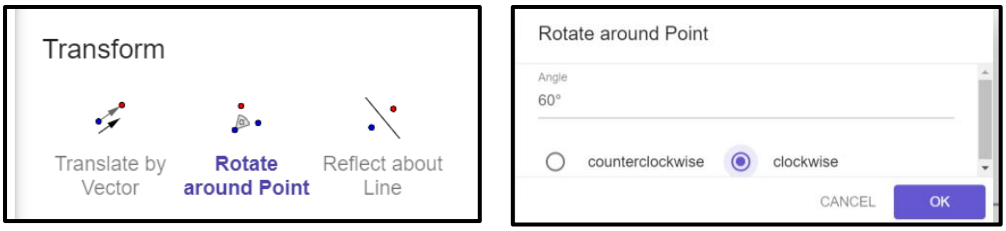
(ก)



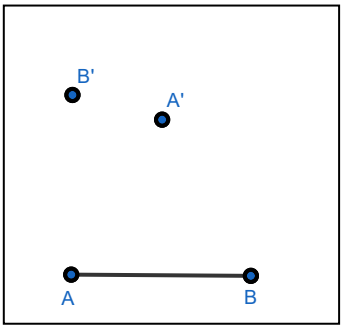
(ข)

รูปที่ 4 การสร้างมุมที่จุด A โดยใช้คำสั่ง Rotate around Point

4) สร้างมุมที่จุด B ให้มีขนาด $60°$ ใช้วิธีเดียวกับข้อ 3 โดยใช้คำสั่ง Rotate around Point คลิกที่จุด A แล้วตามด้วยจุด B ที่จะเป็นจุดยอดมุม เมื่อคลิกแล้วจะมีกล่องโต้ตอบให้ระบุขนาดของมุม ซึ่งจะต้องเปลี่ยนขนาดของมุม $60°$ และเปลี่ยนทิศทางการหมุนเป็นหมุนตามเข็มนาฬิกา โดยเลือกปุ่ม Clockwise ดังรูปที่ 5 (ก) เมื่อกดปุ่ม OK เพื่อยืนยันการเลือกแล้วจะปรากฏจุด A' ที่เป็นภาพฉายของจุด A หลังการหมุน ดังรูปที่ 5 (ข)



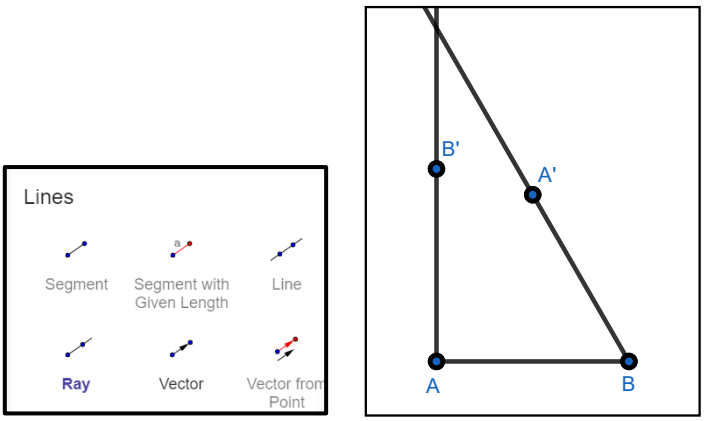
(ก)



(ข)

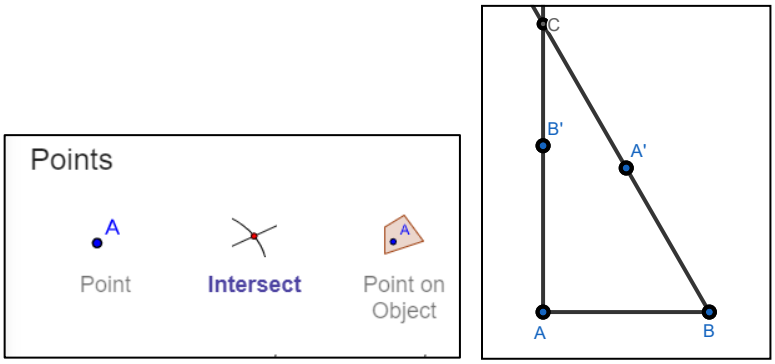
รูปที่ 5 การสร้างมุมที่จุด B โดยใช้คำสั่ง Rotate around Point

5) สร้างแขนของมุม A โดยใช้คำสั่ง Ray ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Lines คลิกที่จุด A และจุด B' และสร้างแขนของมุม B โดยใช้คำสั่ง Ray คลิกที่จุด B และจุด A' จะได้จุดตัดของรังสีทั้งสอง ดังรูปที่ 6



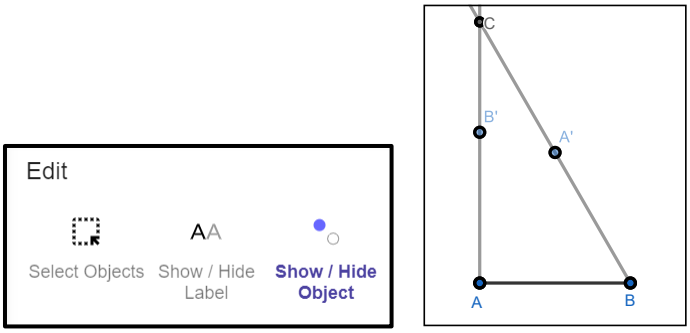
รูปที่ 6 สร้างแขนของมุมโดยใช้คำสั่ง Ray

6) กำหนดจุดตัดของรังสีเป็นจุดยอดมุมจุดที่ 3 ของรูปสามเหลี่ยม โดยใช้คำสั่ง Intersect ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Points นำเมาส์ไปคลิกที่รังสีทีละเส้น จะเกิดจุดตัดและชื่อของจุดตัด คือ จุด C ดังรูปที่ 7

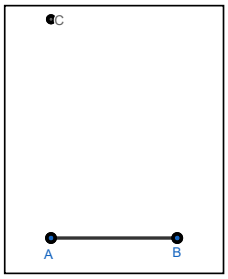


รูปที่ 7 สร้างจุดตัดของรังสีโดยใช้คำสั่ง Intersect คลิกที่รังสีทั้งสอง

7) ซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการในภาพโดยคลิกที่คำสั่ง Show/Hide Object ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Edit ในตัวอย่างนี้นำเม้าส์ไปคลิกที่จุด A' จุด B' และรังสี 2 เส้นที่ลากผ่านจุดทั้งสอง แต่อย่าให้คลิกโดนจุดตัด C ซึ่งจะเป็นมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมที่กำลังสร้าง ซึ่งภาพที่ปรากฏจะเลือนราง ดังรูปที่ 8 (ก) นำเมาส์ไปคลิกที่คำสั่ง Move เพื่อยกคำสั่ง Show/Hide Object ภาพที่เกิดขึ้นในขั้นตอนนี้จะปรากฏดังรูปที่ 8 (ข)



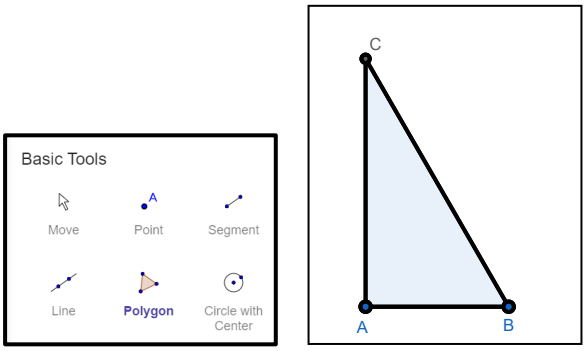
(ก)



(ข)

รูปที่ 8 การใช้คำสั่ง Show/Hide Object ซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการของภาพ

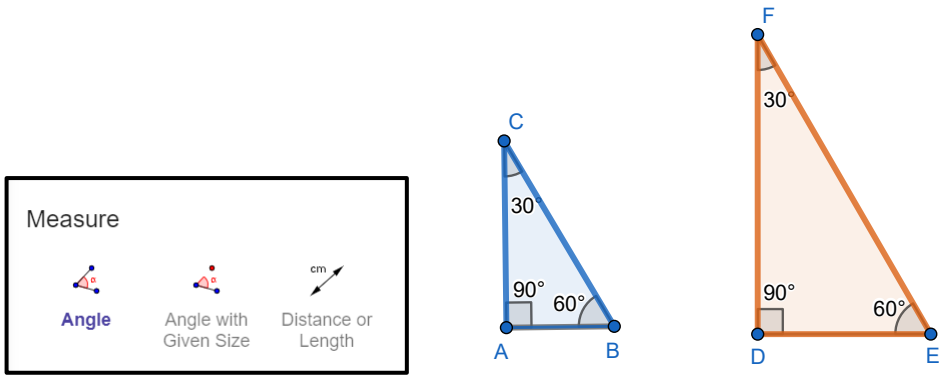
8) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC โดยใช้คำสั่ง Polygon ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Basic Tools นำเมาส์ไปคลิกที่จุด A จุด B จุด C และกลับไปที่จุดเริ่มต้น คือ จุด A นำเมาส์ไปคลิกที่คำสั่ง Move เพื่อยกเลิกคำสั่ง Polygon ภาพที่ปรากฏคือ รูปสามเหลี่ยมที่มีสีระบายภายในรูป ดังรูปที่ 9



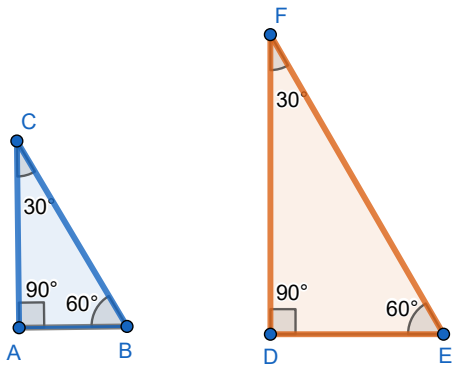
รูปที่ 9 สร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีจุดยอดมุม 3 จุดที่ปรากฏในรูปที่ 8 (ข) โดยใช้คำสั่ง Polygon

9) สร้างรูปสามเหลี่ยม DEF โดยใช้วิธีสร้างจากข้อ 1) ถึง 8) ในบริเวณที่ว่าง เริ่มต้นด้วยการสร้างส่วนของเส้นตรง DE ให้ยาวกว่าส่วนของเส้นตรง AB จากนั้นใช้คำสั่ง Rotate around Point สร้างมุมที่จุด D ให้มีขนาดเท่ากับมุม A ในตัวอย่างนี้กำหนดให้มีขนาด $90°$ และสร้างมุมที่จุด E ให้มีขนาดเท่ากับมุม B ให้มีขนาด $60°$ เมื่อสร้างครบทุกขั้นตอน จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF ดังรูปที่ 10

10) วัดขนาดของมุมทุกมุม โดยใช้คำสั่ง Angle ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Measure จะได้รูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่มีขนาดของมุม 2 คู่ที่ต้องการ คือ $\angle A = \angle D = 90°$ และ $\angle B = \angle E = 60°$ สำหรับมุม C ที่เกิดจากการตัดรังสีสองเส้นที่เป็นแขนของ $\angle A$ และ $\angle B$ และมุม F ที่เกิดจากการตัดรังสีสองเส้นที่เป็นแขนของ $\angle D$ และ $\angle E$ จะมีค่าเท่ากันคือ $30°$ เพราะมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ $180°$ ดังนั้นมุมที่เหลือมีค่าเท่ากับ $180° - (90° + 60°) = 180° - 150° = 30°$ ดังรูปที่ 10 (ก)



(ก) การวัดมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้คำสั่ง Angle



(ข)

รูปที่ 10 รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF เพราะมีมุมคู่เท่ากัน 3 คู่

หมายเหตุ ศึกษาวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูปที่คล้ายกัน ตามเงื่อนไขของการสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากัน 2 คู่ จากเว็บไซต์ https://www.geogebra.org/geometry/trz2qdpd

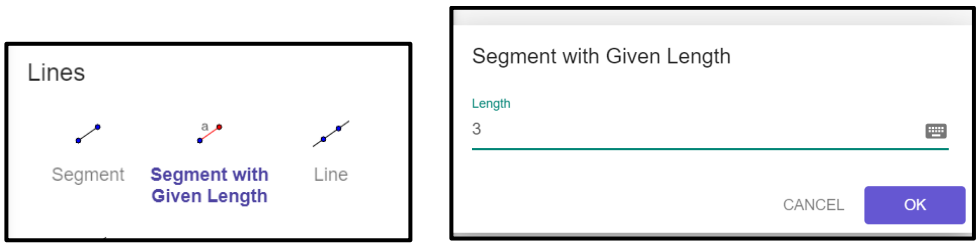
กิจกรรมที่ 1 จงสร้างรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ตามเงื่อนไขของการสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากัน 2 คู่ คือ $72°$ และ $35°$

กรณีที่ 2 การสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีมุมเท่ากัน 1 คู่ และให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันนี้มีค่าเท่ากัน

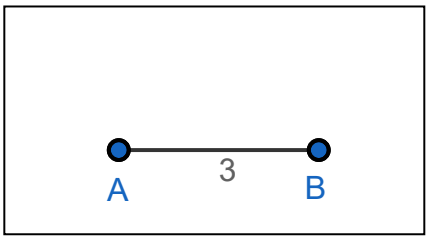
วิธีสร้าง

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามความยาวของด้านที่กำหนด เช่น กำหนดความยาวของด้านประกอบมุมฉากยาว 3 หน่วย และ 4 หน่วย มีขั้นตอนการทำดังนี้

1) สร้างส่วนของเส้นตรงที่กำหนดความยาวด้วยคำสั่ง Segment with Given Length ที่อยู่เครื่องมือประเภท Lines แล้วนำเมาส์ไปคลิกที่บริเวณที่จะสร้างรูป เมื่อคลิกแล้วจะมีกล่องโต้ตอบให้ระบุความยาว ในตัวอย่างนี้กำหนดให้ด้าน AB ยาว 3 หน่วย ดังรูปที่ 11 (ก) แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เพื่อตกลงตามค่าที่ระบุ จะได้ส่วนของเส้นตรง AB ที่มีความยาวตามต้องการ ดังรูปที่ 11 (ข)



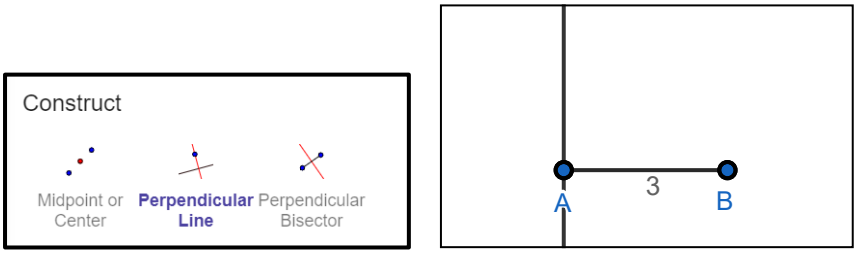
(ก)



(ข)

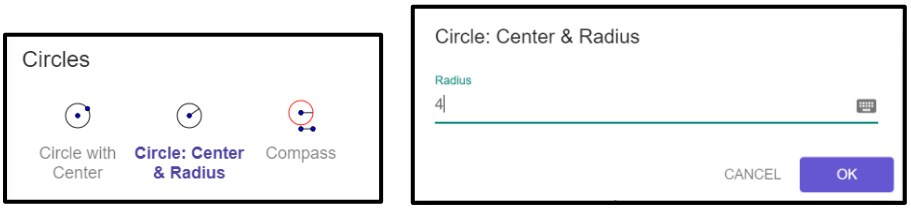
รูปที่ 11 การสร้างด้าน AB ให้มีความยาว 3 หน่วย

2) สร้างมุมฉากที่จุด A โดยใช้คำสั่ง Perpendicular Line แล้วนำเมาส์ไปคลิกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB ตามลำดับ ซึ่งจะปรากฏเส้นตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด A ดังรูปที่ 12

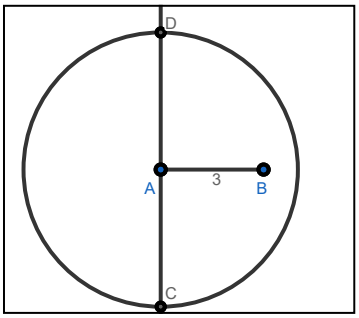


รูปที่ 12 การสร้างมุมฉากที่จุด A

3) การสร้างด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งให้ยาวเท่ากับ 4 หน่วย ใช้คำสั่ง Circle: Center & Radius ที่อยู่ในเครื่องมือประเภท Circles แล้วนำเมาส์ไปคลิกที่จุด ซึ่งจะมีกล่องโต้ตอบให้ระบุความยาวรัศมี (Radius) ในตัวอย่างนี้ให้พิมพ์ตัวเลข 4 ตามที่ต้องการ ดังรูป 13 (ก) แล้วคลิกปุ่ม OK เพื่อตกลงตามค่าที่เลือก เมื่อคลิกแล้วจะปรากฏวงกลม เลือกคำสั่ง Intersect แล้วคลิกที่เส้นตั้งฉากและวงกลม จะได้จุดตัดที่มีระยะห่างจากจุด A 4 หน่วย ดังรูปที่ 13 (ข)



(ก)

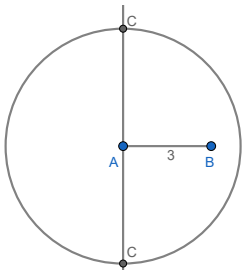


(ข)

รูปที่ 13 การสร้างด้านประกอบมุมฉากยาว 4 หน่วย

4) เปลี่ยนชื่อจุดตัดตามที่ต้องการ ในตัวอย่างจะเปลี่ยนชื่อจุดตัด D เป็นจุด C โดยคลิกที่จุด D ซึ่งจะมีกล่องโต้ตอบปรากฏขึ้น ให้เลือกปุ่มที่มีอักษร AA ดังรูปที่ 14 (ก) จากนั้นลบเครื่องหมาย ✓ที่มีข้อความ Show Label ออก และลบอักษร D ในกล่องโต้ตอบ แล้วพิมพ์อักษร C แทน จากนั้นคลิกที่ข้อความ Show Label แล้วคลิกที่คำสั่ง Move เพื่อยุติคำสั่งเดิม ตัวอักษรที่แก้ไขจะปรากฏดังรูปที่ 14 (ข)

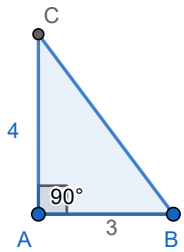
(ก)



(ข)

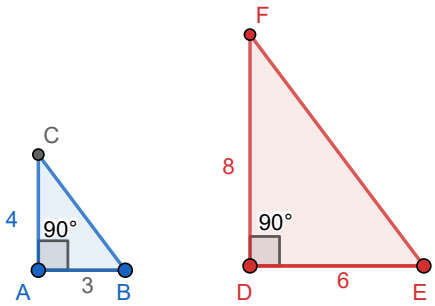
รูปที่ 14 การเปลี่ยนชื่อจุดตัด โดยคลิกที่จุด แล้วเลือกปุ่มในกล่องโต้ตอบที่ต้องการจะเปลี่ยนชื่อ

5) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC โดยซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการจากการใช้คำสั่ง Show/Hide Object ต่อไปใช้คำสั่ง Polygon สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC วัดความยาวของด้านที่สร้างได้ 3 หน่วย และ 4 หน่วย และขนาดของมุมที่อยู่ระหว่างด้านทั้งสองได้ $90°$ ดังรูปที่ 15



รูปที่ 15 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวของด้าน 2 ด้านและมุมในระหว่างด้านทั้งสอง

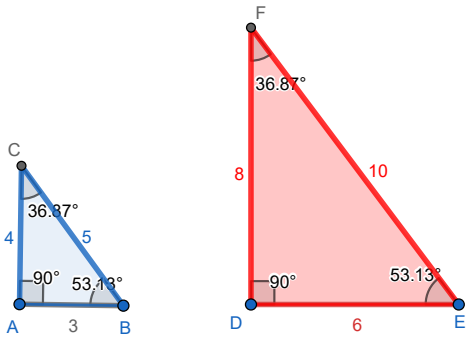
6) สร้างรูปสามเหลี่ยม DEF โดยใช้วิธีสร้างจากข้อ 1) ถึง 5) ในบริเวณที่ว่าง เริ่มต้นด้วยการสร้างส่วนของเส้นตรง DE ให้ยาวเป็น 2 เท่าของความยาวของส่วนของเส้นตรง AB คือ ยาว 6 หน่วย และความยาวของด้าน DF ให้ยาวเป็น 2 เท่าของความยาวของส่วนของเส้นตรง AC คือยาว 8 หน่วย และมุมที่จุด D ให้มีขนาดเท่ากับมุม A ในตัวอย่างนี้กำหนดให้เป็นมุมฉากหรือมีขนาด $90°$ เมื่อสร้างครบทุกขั้นตอน จะได้รูปสามเหลี่ยม DEF ดังรูปที่ 16



รูปที่ 16 สร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายให้อัตราส่วนของด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันมีค่าเท่ากัน

จากรูปที่ 16 ขนาดของมุม A และขนาดของมุม D มีค่าเท่ากัน คือ $90°$ และอัตราส่วนของความยาวของด้านประกอบมุม A ต่อ ความยาวของด้านประกอบมุม D คือ $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

7) วัดขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือ เพื่อนำไปตรวจสอบว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีขนาดของมุมทุกคู่เท่ากัน และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่สมนัยกันเท่ากัน ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17 รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากรูปที่ 17 เมื่อตรวจสอบภาพที่สร้างเสร็จแล้วตามเงื่อนไขที่ให้มีมุมเท่ากัน 1 คู่ และให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันนี้มีค่าเท่ากัน จะได้ข้อคาดการณ์ว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย ซึ่งสามารถนำการให้เหตุผลมาใช้เพื่อพิสูจน์เป็นหลักการหรือทฤษฎีได้

หมายเหตุ ศึกษาวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูปที่คล้ายกัน ตามเงื่อนไขของการสร้างมุม 1 มุมให้มีขนาดเท่ากัน และอัตราส่วนของความยาวของด้านประกอบมุมที่เท่ากันนี้มีค่าเท่ากัน จากเว็บไซต์

https://www.geogebra.org/geometry/e8pc3sqa

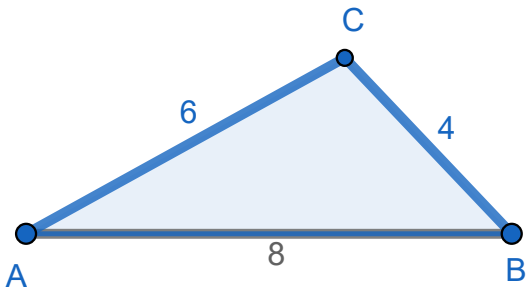
กิจกรรมที่ 2 จงสร้างรูปสามเหลี่ยม 2 รูปที่เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ตามเงื่อนไขของการสร้างมุมเท่ากัน 1 คู่ คือ $75°$และให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่ประกอบมุมที่เท่ากันนี้มีค่าเท่ากัน คือ รูปแรกมีด้านประกอบมุมเป็น 21 หน่วย และ 15 หน่วย รูปที่สองมีด้านประกอบมุมเป็น 14 หน่วย และ 10 หน่วย

กรณีที่ 3 สร้างรูปสามเหลี่ยมให้ด้าน 3 ด้านที่สมนัยกันมีอัตราส่วนของความยาวเท่ากัน

ตัวอย่างนี้จะกำหนดให้รูปสามเหลี่ยมรูปแรกมีด้านยาว $a = 4$ หน่วย $b = 6$ หน่วย และ $c = 8$ หน่วย รูปที่ 2 มีด้านยาว $d = 5$ หน่วย $e = 7.5$ หน่วย และ $f = 10$ หน่วย ซึ่งมีอัตราส่วนของความยาวของด้านสมนัย ดังนี้ $\frac{a}{d} = \frac{4}{5}, \frac{b}{e} = \frac{6}{7.5} = \frac{4}{5}$ และ $\frac{c}{f} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

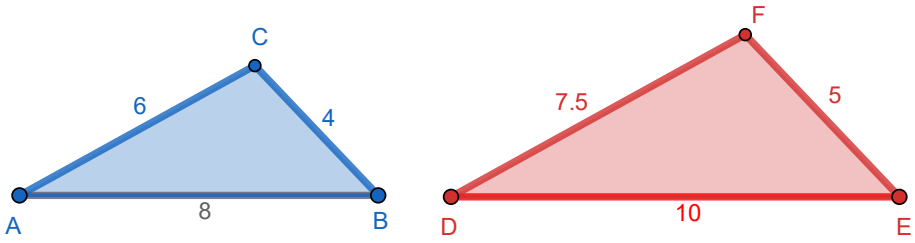
วิธีสร้าง

1) สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 4 หน่วย ด้านตรงข้ามมุม B ยาว 6 หน่วย และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 8 หน่วย โดยใช้คำสั่ง Segment with Given Length ที่จุด A คำสั่ง Circle: Center & Radius ที่จุด A และจุด B คำสั่ง Intersect เพื่อกำหนดจุดตัด C คำสั่ง Show/Hide Object เพื่อซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการ คำสั่ง Polygon เพื่อสร้างรูปสามเหลี่ยม และคำสั่ง Distance or Length เพื่อวัดความยาวด้าน หากต้องการแก้ไขชื่อด้านให้คลิกที่ด้านและปุ่ม Setting เพื่อให้สอดคล้องกับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ต้องการ ดังรูปที่ 18



รูปที่ 18 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาว 3 ด้าน

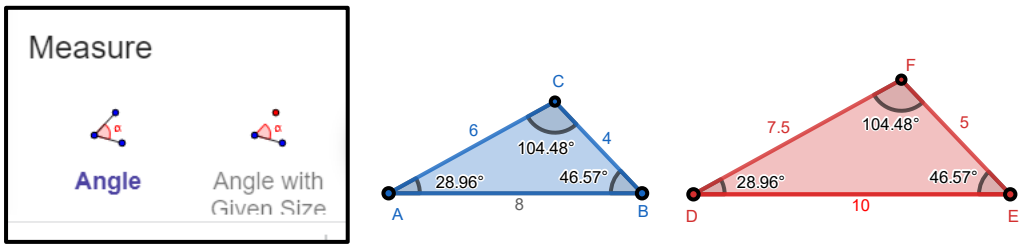
2) สร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้ด้านตรงข้ามมุม D ยาว 5 หน่วย ด้านตรงข้ามมุม E ยาว 7.5 หน่วย และด้านตรงข้ามมุม F ยาว 10 หน่วย โดยใช้คำสั่งทำนองเดียวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ในข้อ 1) ดังรูปที่ 19



รูปที่ 19 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวของด้าน 3 ด้าน

ในรูปที่ 19 การสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ใช้ความยาวของด้านที่มีอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกับรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีค่าเท่ากัน คือ $\frac{4}{5}$

3) วัดขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF โดยใช้คำสัง Angle และจะได้ รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีมุมเท่ากัน 3 คู่ ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนของความยาวของด้านเท่ากัน

จากรูปที่ 20 จะพบว่า รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มีมุมเท่ากัน 3 คู่ ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

หมายเหตุ ศึกษาการสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่กำหนดให้ด้าน 3 ด้านที่สมนัยกันมีอัตราส่วนของความยาวเท่ากัน จากเว็บไซต์ https://www.geogebra.org/geometry/zx23tpbz

ข้อเสนอแนะ

1. การสร้างรูปสามเหลี่ยมคล้ายสามารถสร้างโดยไม่ต้องสร้างสไลเดอร์มุมได้ โดยผู้ใช้กำหนดขนาดของมุมในกล่องโต้ตอบขณะสร้างมุมได้

2. การกำหนดตำแหน่งทศนิยมที่มีหลายตำแหน่งจะได้ค่าของอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่สมนัยที่เป็นค่าประมาณที่เท่ากันได้หลายตำแหน่ง

3. การใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สร้างข้อความคาดการณ์ (conjecture) ก่อนนำไปพิสูจน์ตามหลักการให้เหตุผลเพื่อให้ได้ข้อความที่เป็นจริงหรือทฤษฎีบทได้