4. การคูณ

เรียบเรียง สมชาย ศรีวรางกูล

บรรณาธิการ กระจาย คงสง

ลือชัย ทิพรังศรี

บทนำ

จากบทนำในหนังสือ INDIAN MATHEMATICS AN INTRODUCTION ของอาชอค จุนยุนวาลา (Ashok Jhunjhunwala) เขียนไว้ในบทนำเกี่ยวกับตัวเขาตอนเยาว์วัย “ตอนที่ฉันอายุ 10 ขวบได้เรียกช่างไม้มาที่บ้านเพื่อทำ

ชั้นว่างหนังสือ แต่ฉันตองการชั้นที่วางหนังสือนั้นมีความสูงแต่ละชั้นสูงแตกต่างกัน ฉันอธิบายถึงความต้องการของฉันให้แก่ช่างไม้คนนั้น เขาไปที่ผนังห้องเพื่อวัดให้ได้ขนาดพอดีตามที่ฉันต้องการ เขาจดขนาดของแต่ละชั้นและส่วนต่าง เมื่อวัดขนาดเสร็จ ฉันขอร้องให้เขาคำนวณปริมาณขนาดไม้ที่ต้องใช้และราคาค่าทำชั้นว่างหนังสือนี้ และแล้วเขาก็เริ่มคำนวณ ในขณะเดียวกันฉันก็เริ่มคำนวณเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง (cross-verification) ช่างไม้ใช้เวลาคำนวณประมาณ 4 นาที ในขณะที่ต้องใช้เวลาเกือบสิบว่านาทีจึงจะได้ ฉันหวนกลับมาคิดว่าฉันควรจะคำนวณเร็วกว่าเขา นี่เขาเป็นช่างไม้ที่ไม่ได้เคยเรียนโรงประถมเลย

ฉันใช้เวลาครึ่งชั่วโมงขอร้องให้เขาช่วยสอนวิธีการคำนวณของเขา อะไรนี่มันเป็นวิธีช่างง่ายและน่าทึ่ง ฉันจะอธิบายให้กระจ่างดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างเช่น ในการคำนวณหาพื้นที่ของไม้แผ่นหนึ่ง ที่มีความยาว 5 ฟุต 1 นิ้ว กว้าง 3 ฟุต 5 นิ้ว

วิธีปกติ ที่เราใช้การคำนวณก็คือวิธีแปลงหน่วยเป็นหน่วยเดียวกันก่อน ดังนี้

ยาว 5 ฟุต 1 นิ้ว = 61 นิ้ว $\quad \underline{61\times 41}$

กว้าง 3 ฟุต 5 นิ้ว = 41 นิ้ว $\quad$ 2501 ตร.นิ้ว

2501 ตร.นิ้ว เท่ากับ

$$
\begin{array}{r l}
144\,)\; 2501 & (\;17 \\
\underline{144} & \\
1061 & \\
\underline{1008} & \\
53 &
\end{array}
$$

คำตอบคือ 17 ตร.ฟุต 53 ตร.นิ้ว

แต่วิธีที่ช่างไม้ชาวอินเดียใช้มันช่างง่ายกว่าเหลือเกิน ช่างไม้เขาไม่ต้องแปลงหน่วยให้เป็นหน่วยเดียวกันหน่วยใดหน่วยหนึ่ง เช่นปกติที่เราใช้คำนวณกันอยู่

วิธีที่ช่างไม้ชาวอินเดีย คิดเป็นดังนี้

(1) หาผลคูณของความยาวและความกว้างส่วนที่มีหน่วยเป็นฟุตได้ผลลัพธ์เป็นตารางฟุต เขียนผลลัพธ์นี้ใต้หลักเดียวกันของหลักคำตอบที่มีหน่วยเป็นตารางฟุต: $5 \times 3 = 15$

5 ฟุต　　　　1 นิ้ว

3 ฟุต　　　　5 นิ้ว

15 ตร.ฟุต　　　　(เป็นการคูณแบบแนวตั้ง)

(2) ในทำนองเดียวกัน หาผลคูณของความยาวและความกว้างส่วนที่มีหน่วยเป็นนิ้ว ได้ผลลัพธ์เป็นตารางนิ้ว เขียนผลลัพธ์นี้ใต้หลักเดียวกันของหลักคำตอบที่มีหน่วยเป็นตารางนิ้ว: $1 \times 5 = 5$ (ทางขวามือ)

5 ฟุต　　　　1 นิ้ว

3 ฟุต　　　　5 นิ้ว

15 ตร.ฟุต　　　　5 ตร.นิ้ว　　(เป็นการคูณแบบแนวตั้ง)

(3) หาผลคูณไขว้ส่วนของความยาวที่มีหน่วยเป็นฟุตกับส่วนของความกว้างมีหน่วยเป็นนิ้ว และส่วนของความกว้างที่มีหน่วยเป็นฟุตกับส่วนของความยาวมีหน่วยเป็นนิ้ว แล้วบวกผลคูณทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน เขียนไว้ตรงกลางระหว่างคำตอบที่ได้มาจากผลคูณในสองขั้นตอนที่แล้ว: $5 \times 5 + 3 \times 1 = 28$ (ฟุต × นิ้ว)

5 ฟุต　　　　1 นิ้ว

3 ฟุต　　　　5 นิ้ว

15 ตร.ฟุต　　28　　5 ตร.นิ้ว

(4) หารผลลัพธ์ 28 (ฟุต × นิ้ว) ที่ได้จากขั้นที่ (3) ด้วย 12 (นิ้ว : ฟุต) ได้ผลลัพธ์ของผลหารที่เป็นจำนวนเต็ม 2 ตารางฟุต นำไปบวกกับส่วนที่มีหน่วยเป็นตารางฟุต ที่คำนวณได้มาก่อนหน้านั้น ส่วน ๆ ที่เป็นเศษเหลือคือ 4 (ฟุต × นิ้ว) คูณส่วนนี้ด้วย 12 (นิ้ว : ฟุต) ได้ผลคูณที่เป็นจำนวนเต็ม 48 ตารางนิ้ว และแล้วก็นำไปบวกกับส่วนที่มีหน่วยเป็นตารางนิ้ว ที่คำนวณได้มาก่อนหน้านั้นเช่นกัน

5 ฟุต　　　　1 นิ้ว

3 ฟุต　　　　5 นิ้ว

15 ตร.ฟุต　　28　　5 ตร.นิ้ว

$$2 \longleftarrow \frac{28}{12} \longrightarrow 4 \times 12 = 48$$

ผลลัพธ์(จำนวนเต็ม)　　　เศษเหลือ

17 ตร.ฟุต　　　　53 ตร.นิ้ว　　　ผลที่คำนวณได้เป็นไปตามที่เราต้องการ

https://archive.org/details/IndianMathematicsAnIntroductionAshokJhunjhunwala/mode/1up

จากบทคำนำข้างต้นเป็นการคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้ (Vertically and Cross-wise) พอจะอนุมานได้ว่าช่างไม้ชาวอินเดียได้ถ่ายทอดการคิดเลขมานานแล้ว เวทคณิตเกิดจาบุคลสามกลุ่ม คือสถาปนิก (สถาปัตยกรรม) โหราศาสตร์ (ดาราศาสตร์) หมอ (เวชศาสตร์)

หมายเหตุ 1. สูตรอูรธวะ ติรยัคภยามฺ เป็นสูตรที่ 3 ของเวทคณิต เป็นสูตรในอถรรพเวท หรือ อาถรรพเวท ของพระเวท เป็นเวทมนตร์คาถาเพื่อให้เกิดผลดีแก่ฝ่ายตน หรือผลร้ายแก่ฝ่ายศัตรู ตลอดจนการบันดาลสิ่งที่เป็นมงคลหรืออัปมงคล การทำเสน่ห์ การรักษาโรค และอื่น ๆ

2. เนื่องจากเวทคณิตอยู่ในภาคผนวกของเวทคณิตคือ อุปเวท - คัมภีร์ "พระเวทรอง" ของอินเดียโบราณ

เนื้อหามีลักษณะเป็นวิทยาการ ไม่นับว่าเป็นคัมภีร์ศาสนา ได้แก่

(1) อายุรเวท - วิชาแพทย์ ถือว่าเป็นสาขาของคัมภีร์อถรรพเวทหรืออาถรรพเวท

(2) ธนุรเวท - วิชายิงธนูและการใช้อาวุธอื่น ถือว่าเป็นสาขาของคัมภีร์ยชุรเวท

(3) คันธรรพเวท, คานธรรพเวท หรือ คนธรรพเวท - วิชาการดนตรี ถือว่าเป็นสาขาของคัมภีร์สามเวท

(4) สถาปัตยเวท - วิชาการก่อสร้าง ไม่ระบุว่าเป็นสาขาของคัมภีร์พระเวทใด,พัฒนามาเป็นสถาปัตยกรรมศาสตร์

3. จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี

เวท อาจหมายถึง

- วิทยา, วิทยาการ, ศาสตร์, ความรู้ - คำ "เวท" หมายความว่า ความรู้ เช่น เภสัชเวท คือ วิทยาศาสตร์แขนงที่ว่าด้วยยาที่ได้จากพืช สัตว์และแร่ธาตุโดยตรง หรือสารที่เกิดจากสิ่งเหล่านั้น หรือวิทยาศาสตร์แขนงที่ว่าด้วยสมุนไพร
- เวทมนตร์ - ถ้อยคำศักดิ์สิทธิ์ที่ผูกขึ้นเป็นมนตร์หรือคาถาอาคมเมื่อนำมาเสกเป่าหรือบริกรรมตามลัทธิวิธีที่มีกำหนดไว้ สามารถให้ร้ายหรือดี หรือป้องกันอันตรายต่าง ๆ ตามคติไสยศาสตร์ได้
- คัมภีร์พระเวท - ชื่อคัมภีร์ภาษาสันสกฤตโบราณซึ่งเป็นพื้นฐานของศาสนาพราหมณ์ยุคแรก มีสี่คัมภีร์ดังต่อไปนี้ โดยสามคัมภีร์แรกเรียกว่า "ไตรเวท" หรือ "ไตรเพท" ต่อมารับอถรรพเวทหรืออาถรรพเวท เข้ามารวมเป็นสี่คัมภีร์เรียกว่า "จตุรเวท" หรือ "จตุรเพท"
    - ฤคเวท - ว่าด้วยบทสวดสรรเสริญเทพเจ้าทั้งหลาย ตอนท้ายกล่าวถึงการสร้างโลกซึ่งต่อมาได้กลายเป็นต้นแบบความเชื่อของชาวอินเดีย

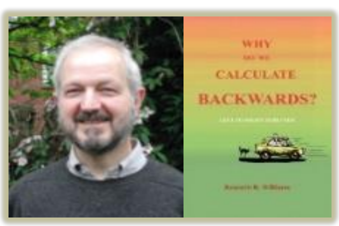
- ยชุรเวท - ว่าด้วยรายละเอียดการประกอบยัญพิธีและลำดับมนตร์ที่นำมาจากคัมภีร์ฤคเวทเพื่อสวดในขั้นตอนต่าง ๆ ของพิธี
- สามเวท - ว่าด้วยบทขับที่คัดเลือกมาจากประมาณหนึ่งในหกของฤคเวท และใช้เฉพาะในพิธีที่บูชาด้วยน้ำโสม
- อถรรพเวท หรือ อาถรรพเวท - เป็นเวทมนตร์คาถาเพื่อให้เกิดผลดีแก่ฝ่ายตน หรือผลร้ายแก่ฝ่ายศัตรู ตลอดจนการบันดาลสิ่งที่เป็นมงคลหรืออัปมงคล การทำเสน่ห์ การรักษาโรค และอื่น https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B9%80%E0%B8%A7%E0%B8%97

ในเวทคณิต "เรื่องการคูณการคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้ (Vertically and Cross-wise)" หรือสูตรอูรธวะ ติรยัคภยามฺ เป็นสูตรที่ 3 ของเวทคณิต ใช้สำหรับการดำเนินการคูณแบบทั่วไป (General Multiplication) ของเลขสองจำนวน เป็นสูตรใช้มากที่สุดเพราะสามารถใช้ได้ทุกกรณีกับการคูณ และมีประโยชน์มากที่จะนำไปใช้กับการยกกำลังสอง การหารที่ตัวตั้งและตัวหารที่มีค่ามาก ๆ ซึ่งจะกล่าวต่อไปในเรื่องการหารตรง หรือการหารธง (Straight Division or Flag Division)

4.1 การคิดเลขจากซ้ายไปขวา (Calculation from Left To Right) สำหรับการคูณ

เนื่องจากการบวกและการลบ ที่กล่าวมาแล้วเน้นการดำเนินการจากซ้ายไปขวา การดำเนินการคูณก็จะเน้นเช่นกัน

เคนเน็ธ วินเลี่ยม (Kenneth Williams)" สอนในโรงเรียน วิทยาลัยและมหาวิทยาลัย ได้รับเชิญไปยังหลายประเทศเพื่อสอนเวทคณิตและได้พัฒนาสื่อการสอนและตำราการเรียนรู้เรื่องต่าง ๆ เกี่ยวกับเวทคณิต ซึ่งมีอยู่ในเว็บไซต์ Kenneth's Curriculum Vitae นี้



เคนเน็ธ วินเลี่ยม
สนับสนุนสิ่งนี้คือ "การคำนวณจากซ้ายไปขวา (Calculation from Left to Right)"
เขาเขียนหนังสือ WHY DO WE CALCULATE BACKWARDS ?

Left to Right is Better

กล่าวไว้ว่า "ใช่เราคำนวณย้อนหลัง! เราอ่านเขียนและออกเสียงตัวเลขและคำจากซ้ายไปขวา แต่เราคำนวณจากขวาไปซ้าย (เริ่มต้นด้วยหน่วย) สิ่งนี้ไม่เพียง แต่ไม่สอดคล้องกันเท่านั้น แต่ยังไม่จำเป็นอีกด้วย เนื่องจากการคำนวณจากซ้ายไปขวานั้นง่ายมากดังที่แสดงไว้ในหนังสือเล่มนี้ แต่มีเหตุผลอื่นที่ชัดเจนกว่าในการทำงานจากซ้ายไปขวาตัวเลขที่สำคัญที่สุดจะอยู่ทางซ้ายเสมอดังนั้นในการทำงานจากด้านซ้ายเราจะได้ตัวเลขเหล่านี้ก่อน และนั่นหมายความว่ามีประสิทธิภาพมากกว่าโดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับการคำนวณคิดเลขในใจที่รวดเร็ว นอกจากนี้วิธีซ้ายไปขวายังช่วยให้เราสามารถรวมการดำเนินการซึ่งหมายความว่าเราสามารถคำนวณจำนวนมาก

และรับตัวเลขคำตอบทีละหลักตามความแม่นยำที่ต้องการได้ ด้วยเหตุผลเหล่านี้และเหตุผลอื่น ๆ จากซ้ายไปขวาจึงเป็นวิธีที่เป็นธรรมชาติเหมาะสมและง่ายในการคำนวณ ไม่ว่าจะเป็นการพัฒนาทักษะการคิดเลขในใจของคุณหรือเพื่อทำความเข้าใจ ความเรียบง่ายและประสิทธิภาพที่ยอดเยี่ยมของวิธีนี้หนังสือเล่มนี้มีศักยภาพที่จะเปลี่ยนวิธีการคำนวณของคุณไปตลอดกาล หนังสือเล่มนี้แสดงให้เห็นว่าเราคำนวณย้อนกลับอธิบายถึงข้อดีของการทำงานแบบทางเลือกจากซ้ายไปขวาและแสดงวิธีคำนวณจากซ้ายไปขวา”

หากปราศจากความเข้าใจที่มีมีความหมายเป็นนัย ๆ ของการคำนวณเกี่ยวกับสูตรต่าง ๆ ในเวทคณิต คิดจากซ้ายไปขวา เวทคณิตเปิดโอกาสให้เราได้มีทางเลือก สำรวจและอธิบายการทำงานของสูตรว่าทำงานอย่างไ การคูณแบบดั้งเดิมที่รู้จักกันดีนั้นมีแบบแผนเดียว ดังนี้

ตัวตั้ง × ตัวคูณ = ผลลัพธ์

เช่น

$$\begin{array}{rl} 9\,7\,6\,4\,3 & \text{ตัวตั้ง} \\ \times\quad 4\,8 & \times\ \underline{\text{ตัวคูณ}} \\ \hline 7\,8\,1\,1\,4\,4 & \underline{\text{ผลลัพธ์}} \\ 3\,9\,0\,5\,7\,2 & \\ \hline 4\,6\,8\,5\,8\,6\,4 & \text{ซึ่งเป็นวิธีดั้งเดิมที่ใช้ทั่วไป} \\ \hline\hline \end{array}$$

วิธีคิดการคูณจากซ้ายไปขวา

วิธีคูณ ให้คูณทแยงจากตัวคูณไปยังตัวตั้งจากตัวเลขตัวแรกของตัวตั้งทางซ้ายสุด แล้วเคลื่อนที่ถัดป้ำงล่างทางขวาหาผลคูณแต่ละตัว เขียนผลคูณให้หลักสิบอยู่หน้าเยื้องไปข้าล่างทางซ้ายของหลักหน่วย เช่น

$7\times5=35$ เขียนเขียนแบบเยื้อง $7\times5={}_{3}5$ และต้องถือว่าอยู่บรรทัดเดียวกัน

$9\times9=81$ เขียนเขียนแบบเยื้อง $9\times9={}_{8}1$ ในทำนองเดียวกัน

$4\times2=08$ เขียนเขียนแบบเยื้อง $4\times2={}_{0}8$ ผลคูณต้องเขียน 2 หลักและอยู่บรรทัดเดียวกัน

ตัวอย่างวิธีเขียนการคูณเลขจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณ 47896×7

วิธีการเขียน การดำเนินการคูณจากซ้ายไปขวาได้มีข้อกำหนดระเบียบวิธีการเขียนเพื่อให้สอดคล้องกับการคำนวณการยกกำลังสอง การหารและการถอดราก ที่จะศึกษาในบทต่อไป

1. $\begin{array}{r} 4\,7\,8\,9\,6 \\ \times\qquad 7 \\ \hline {}_{2}8 \\ \hline\hline \end{array}$

คูณ 4 ด้วย 7 ผลคูณเท่ากับ 28

แบ่ง 28 เป็นสองส่วนคือ 2 กับ 8 แล้วเขียน 2 ห้อยอยู่หน้า 8 เยื้องลงไปข้างล่างทางซ้าย

2. 4 7 8 9 6 × 7

$$\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \quad 7 \\ \hline 8\ 9 \\ {\scriptstyle 2\ \ 4} \end{array}$$

คูณ 7 ด้วย 7 ได้ผลคูณเท่ากับ 49 ในทำนองเดียวแบ่งเป็น 4 และ 9 เขียน 4 ห้อยไว้ใต้ 8 (จากขั้นที่ 1) และเขียน 9 ไว้บนแถวเดียวกับ 8

3.

$$\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \quad 7 \\ \hline 8\ 9\ 6 \\ {\scriptstyle 2\ \ 4\ \ 5} \end{array}$$

คูณ 8 ด้วย 7 ได้ผลคูณเท่ากับ 56 แบ่งเป็น 5 และ 6 เขียน 5 ห้อยไว้ใต้ 9 (จากขั้นที่ 2) และเขียน 6 ไว้บนแถวเดียวกับ 9

4.

$$\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \quad 7 \\ \hline 8\ 9\ 6\ 3 \\ {\scriptstyle 2\ \ 4\ \ 5\ \ 6} \end{array}$$

คูณ 9 ด้วย 7 ได้ผลคูณเท่ากับ 63 แบ่งเป็น 6 และ 3 เขียน 6 ห้อยไว้ใต้ 6 (จากขั้นที่ 3) และเขียน 3 ไว้บนแถวเดียวกับ 6

5.

$$\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \quad 7 \\ \hline 8\ 9\ 6\ 3\ 2 \\ {\scriptstyle 2\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 4} \end{array}$$

คูณ 6 ด้วย 7 ได้ผลคูณเท่ากับ 42 แบ่งเป็น 4 และ 2 เขียน 4 ห้อยไว้ใต้ 3 (จากขั้นที่ 4) และเขียน 2 ไว้บนแถวเดียวกับ 3 ซึ่งเป็นขั้นตอนสุดท้ายของการคูณ

6.

$$\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \quad 7 \\ \hline \bullet\ \ \dot{8}\ \dot{9}\ 6\ 3\ 2 \\ {\scriptstyle 2\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 4} \\ \hline 3\ 3\ 5\ 2\ 7\ 2 \end{array}$$

หาผลบวกแต่ละหลักจากซ้ายไปขวา จากความรู้**การบวกด้วยวิธีการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า** ถ้าผลบวกของหลักใดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 10 ให้ใส่จุด (•) บนตัวเลขถัดไปที่อยู่ข้างหน้า

ดังนั้นเมื่อสำรวจตัวเลขแต่ละหลักจากซ้ายไปขวา พบว่า หลักที่ 2 , 3, 4 มีผลบวกมากกว่า 9 ให้เขียนจุด (•) ใส่ บนตัวเลขของหลักที่อยู่ถัดไปข้างหน้า จากนั้นหาผลบวกแต่ละหลักจากซ้ายไปขวา ให้ใส่เฉพาะเลขโดดของแต่ละหลักซึ่งเป็นวิธีคิดเลขแบบแยกหลัก (Digit Separator Method) ดังกล่าวมาแล้วในเรื่องการบวก **เช่น**

หลักที่ 2 $(\bullet+8+4) = (\bullet+8+1)+3$ ไม่ต้องสนใจกลุ่มที่ผลบวกครบสิบ นำผลบวกที่ไม่ครบสิบคือ 3 เขียนใส่ในช่องคำตอบให้ตรงหลักของผลบวกหลักนี้

หลักที่ 3 $(\bullet+9+5)$ พอดี $(\bullet+9=10)$ ในทำนองเดียวกันไม่ต้องสนใจผลบวกครบสิบ นำผลบวกที่ไม่ครบสิบคือ 5 เขียนใส่ในช่องคำตอบให้ตรงหลักของผลบวกหลักนี้เช่นเดียวกัน

หลักที่ 4 $(6+6)=(6+4)+2$ ในทำนองเดียวกันไม่ต้องสนใจกลุ่มที่ผลบวกครบสิบไปแล้ว เพราะการใช้ความรู้การบวกด้วยวิธีการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้านั้นได้มีการปรับการทดในตัวแล้ว ดังนั้นจึงนำผลบวกที่ไม่ครบสิบคือ 2 เขียนใส่ในช่องคำตอบให้ตรงหลักของผลบวกหลักนี้ได้เลย

ส่วนผลบวกของหลักอื่นที่มีผลบวกไม่ครบสิบ เราสามารถใส่ผลบวกที่ได้เป็นตัวเลขโดดตัวเดียวในช่องของแต่ละหลักได้เลยเช่นเดียวกัน

แต่การคำนวณทางคณิตศาสตร์ เมื่อได้คำตอบแล้วมิได้หมายความว่าสิ้นสุดการคำนวณ จะต้องตรวจคำตอบว่าที่คำนวณได้นั้นถูกต้องหรือไม่ เนื่องจากเวทคณิตมีการตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการยันความถูกต้อง 2 วิธี คือ การคัดออกเก้าและการคัดออกสิบเอ็ด

จากตัวอย่างที่ 1 **การคัดออกเก้า** **การคัดออกสิบเอ็ด**

$$\begin{array}{r} 4\;7\;8\;9\;6 \\ \times \\ \underline{7} \\ \underline{\underline{3\;3\;5\;2\;7\;2}} \rightarrow 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ \times \\ \underline{7} \\ \underline{\underline{49}} \rightarrow 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 6-9+8-7+4= & 2 \\ & \times \\ 7\;=\; & \underline{7} \\ 2-7+2-5+3-3=-8 & \underline{\underline{14}} \rightarrow 4-1=3 \\ -8+11=3 & =3 \end{array}$$

ตอบ $47896\times7=335272$

จากตัวอย่างข้างต้น สามารถลดขั้นตอนให้คิดเลขได้เร็วดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณ 876049×9

วิธีทำ **การคัดออกเก้า** **การคัดออกสิบเอ็ด**

$$\begin{array}{r} 8\;7\;6\;0\;4\;9 \\ \times \\ \underline{9} \\ 2\;3\;4\;\dot{0}\;6\;1 \\ \underline{\underline{{\scriptstyle 7\;6\;5\;0\;3\;8}}} \\ \underline{\underline{7\;8\;8\;4\;4\;4\;1}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 \\ \times \\ \underline{0} \\ \\ \\ \underline{\underline{0}} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 9-4+0-6+7-8= & -2 \\ & \times \\ & \underline{9} \\ \\ 1-4+4-4+8-8+7=4 & \underline{\underline{-18}}=-(8-1) \\ & =-7\rightarrow-7+11=4 \end{array}$$

สรุปขั้นตอนย่อ ๆ เริ่มต้นด้วย จากทางซ้ายสุด $8\times9=72$ เขียน 7 ห้อยเยื้องไปข้างล่างหน้า 2 จากนั้นดำเนินการคูณต่อ $7\times9=63$ เขียน 6 ไว้ตรงข้างล่าง 2 ส่วน 3 เขียนไว้แถวเดียวกับ 2 แล้วในทำนองเดียวกัน $6\times9=54$ เขียน 5 ไว้ตรงข้างล่าง 3 ส่วน 4 เขียนไว้แถวเดียวกับ 3 จากนั้นดำเนินการคูณหลักถัดไปเป็นไปในทำเดียวกันเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึงหลักท้ายสุด เมื่อสิ้นสุดการคูณให้หาผลบวกตามวิธี*การบวกด้วยการจัดกลุ่มให้ครบสิบและกลุ่มไม่ครบสิบและการบวกด้วยวิธีการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า*

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 การดำเนินการคูณจากซ้ายไปขวา

1. $32 \times 3 =$

2. $3234 \times 5 =$

3. $5321 \times 7 =$

4. $6827 \times 8 =$

5. $7997 \times 9 =$

6. $5278 \times 6 =$

7. $5789 \times 4 =$

8. $7092 \times 7 =$

9. $4843 \times 5 =$

10. $5856 \times 8 =$

11. $4896 \times 4 =$

12. $5949 \times 7 =$

13. $56987 \times 8 =$

14. $52648 \times 5 =$

15. $68317 \times 4 =$

16. $96701 \times 9 =$

17. $8469.67 \times 0.7 =$

18. $989.797 \times 0.6 =$

19. $8483.88 \times 0.9 =$

20. $6996.67 \times 0.8 =$

4.2 เวทคณิตสำหรับการคูณ (Vedic Method for Multiplication)

เนื่องจากเวทคณิต เป็นวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีของความแม่นยำและมีความเป็นระเบียบอันรักษาไว้ซึ่งเอกลักษณ์ของความเป็นหนึ่งเดียวและในขณะเดียวกันก็เต็มไปด้วยความหลากหลาย เวทคณิตคือพลังแห่งความสมดุลภาพระหว่างสองคุณสมบัติที่ตรงกันข้าม

ดังนั้นเวทคณิตสำหรับการคูณจึงมีความเป็นเอกลักษณ์และในขณะเดียวกันก็ยังยังมีหลากหลายวิธีเริ่มต้นจากวิธีพื้นฐานจนถึงวิธีเทคนิคและวิธีเฉพาะเจาะจง

เวทคณิตสำหรับการคูณ มี 7 วิธี ดังนี้

1. การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้
   หรือการคูณด้วยสูตรอูรธวะ ติรยัคภยาม (सूत्र ३. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्यां = Sutra 3. Ūrdhva Tiryagbhyām)
2. การคูณด้วยสูตรนิขิลัม (सूत्र २. निखिलं नवतश्चरमं दशतः = Sutra 2. Nikhilam Navathaścaramam Dhaśataḥ)
3. การคูณด้วยสูตรสัดส่วนช่วย หรือการคูณด้วยอุปสูตรอานุรูปเยณะ
   (सूत्र ६. आनुरूप्ये शून्यमन्यत् = Upasutra 6. Ānurūpyeṇa)
4. การคูณด้วยตัวคูณลำดับของเลขเก้า (9,99,999,9999,…) หรือการคูณด้วยสูตรเอกันยูเนนะ ปูเวณะ
   (सूत्र १४. एकन्यूनेन पूर्वेण = Sutra 14. Ekanyūnena Pūrveṇa)
5. การคูณเลขสองจำนวนมีผลบวกตัวเลขส่วนสุดท้ายเท่ากับสิบหรือกำลังของสิบ
   หรือการคูณด้วยอุปสูตรอันตยาโยรทศเกปิ (उपसूत्र ८. अन्त्ययोर्दशकेऽपि = Upasutra 8. Antyayordaśake'pi)
6. การคูณเลขสองจำนวนมีผลบวกตัวเลขส่วนหน้าเท่ากับสิบหรือกำลังของสิบ
   แต่ตัวเลขส่วนหลังต้องเท่ากัน หรือสูตรวมันลยาโยหะ ทศเก อปิ
   (वामनिलयोह दासके आपि सूत्र = Vamanlyayoh Dasake Api Sutra)
7. การคูณเลขสองจำนวนมีผลบวกเลขตัวหน้าเป็นพหุคูณของสิบแต่ตัวหลักหน่วยเท่ากัน
   หรือสูตรวมันลยาโยหะ ทศเก คุนิชหะ อปิ
   (वामनिलयोह दसेक गुणिह आपि सूत्र = Vamanlyayoh Dasake Gunijah Api Sutra)

ในทั้งหมด 7 วิธีข้างต้น วิธีที่ 1 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้หรือการคูณด้วยสูตรอูรธวะติรยัคภยาม เป็นวิธีพื้นฐานเช่นเดียวกับวิธีดั้งเดิมเพียงแต่รูปแบบการคูณนั้นเป็น**รูปแบบของการคิดเลขเร็วสำหรับการคูณที่ใช้พื้นที่การคำนวณเพียงบันทัดเดียว**

ส่วนอีก 6 วิธี นั้นเป็นวิธีเฉพาะเจาะจงหรือวิธีเทคนิคเฉพาะ นี่คือความเป็นเอกลักษณ์ (Identity) และความหลากหลาย (Diversity) ของวิธีคิดเลขเร็วของเวทคณิต ที่จะได้ศึกษาดังต่อไปนี้

4.3 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้หรือการคูณด้วยสูตรอูรธวะ ติรยัคภยาม

ในเวทคณิต เป็นการคูณด้วย สูตรที่ 3 สูตรอูรธวะ ติรยัคภยาม

ภาษาสันสกฤต

Ūrdhva Tiryagbhyām mean Vertically and crosswise

อูรฺทฺธ. ค. สูง , ข้างบน (vertically)

ตีรณ. ค. อันข้ามแล้ว, อันพ้นแล้ว (horizontally) และ

ภยาม ค. ใช้ทั้งสอง (use both)

ความรู้พื้นฐานการคูณเลขสองจำนวน

จำนวนเต็มใด ๆ สามารถกระจายเป็นไปตามกฎการกระจาย (Expansion Law) ในรูปค่าประจำตำแหน่งในระบบฐานสิบ เช่น

$34 = 3\times10+4$ หรือ $573 = 5\times10^2+7\times10+3$ หรือ $6784 = 6\times10^3+7\times10^2+8\times10+4$

ดังนั้นถ้าเขียนจำนวนเต็มใด ๆ ในรูปพารามีเตอร์ (Parameter) เช่น

จำนวนเต็ม ab สามารถกระจายเป็น $a\times10+b$ เมื่อ a และ b เป็นเลขโดด

หรือ จำนวนเต็ม abc สามารถกระจายเป็น $a\times100+b\times10+c$ เมื่อ a , b และ c เป็นเลขโดด

จากความรู้ข้างต้น เลขสองจำนวน $ab\times cd$ $=$ $(10a+b)\times(10c+d)$

วิธีคูณแบบแนวตั้ง

$$\begin{array}{cc} 10a & b \\ \underline{10c} & \underline{d} \\ \end{array}$$

$$\underline{100ac/(ad+bc)10/bd}$$

แสดงขั้นตอนการคูณ

(1) แนวตั้ง

$$\begin{array}{cc} 10a & b \\ \uparrow & \\ \underline{10c} & \underline{d} \\ \end{array}$$

$$\underline{100ac/ \qquad\qquad /}$$

(2) แนวไขว้

$$\begin{array}{cc} 10a & b \\ \underline{10c} & \underline{d} \\ \end{array}$$

$$\underline{100ac/(ad+cb)10/}$$

(3) แนวไขว้

$$\begin{array}{cc} 10a & b \\ & \uparrow \\ \underline{10c} & \underline{d} \\ \end{array}$$

$$\underline{100ac/(ad+cb)10/bd}$$

จากความรู้พื้นฐานการคูณข้างต้นและจากบทนำการหาพื้นที่ของช่างไม้อินเดีย นำมาสู่การการคิดเลขเร็วแบบการคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้ (Vertically and Cross-wise) หรือสูตรอูรธวะ ติรยัคภยามฺ เป็นสูตรที่ 3 ของ

เวทคณิต ใช้สำหรับการดำเนินการคูณแบบทั่วไป (General Multiplication) ของเลขสองจำนวน เป็นสูตรใช้มากที่สุดเพราะสามารถใช้ได้ทุกกรณีกับการคูณ และมีประโยชน์มากที่จะนำไปใช้กับการยกกำลังสอง การหารที่ตัวตั้งและตัวหารที่มีค่ามาก ๆ ซึ่งจะกล่าวต่อไปในเรื่องการหารตรง หรือการหารยกธง (Straight Division or Flag Division)

แบ่งวิธีการคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้ในกรณีตัวตั้งได้ 2 กรณี

(1) กรณีตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักเท่ากัน

(2) กรณีตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักไม่เท่ากัน

การคูณในกรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณที่มีจำนวนหลักเท่ากันนี้ เป็นวิธีที่สั้น สามารถคูณกันในรูปแบบที่จำง่าย ใช้พื้นที่น้อยที่สุด เพราะสามารถหาผลคูณได้โดยดำเนินการหาผลคูณเพียงบรรทัดเดียว และเป็นการพัฒนาการคูณจากซ้ายไปขวาดังกล่าวไว้ข้างต้น

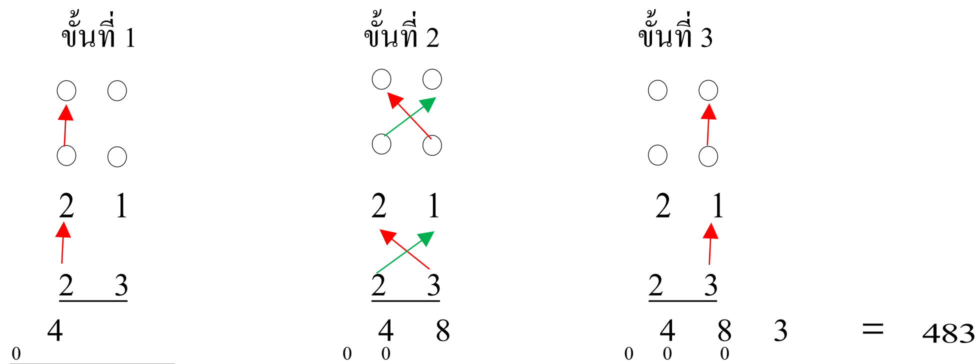
4.3.1 การคูณเลขสองจำนวนที่มีตัวเลข 2 หลักเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 21×23

วิธีทำ เทคนิคการคิดเลขเร็วให้ดำเนินการคิดตามหัวลูกศร (จากล่างขึ้นบน) และในกรณีคูณไขว้ให้คิดจากล่างขึ้นบนและจากขวาไปซ้าย

การดำเนินการคูณมี 3 ขั้นตอนคือ ตั้ง $\rightarrow$ ไขว้ $\rightarrow$ ตั้ง (ตามต้นฉบับ)

การดำเนินการคูณ 3 ขั้นตอน ดำเนินการคูณจากซ้ายไปขวาและให้คูณไข้วทแยงไปตามหัวลูกศรสีแดง ก่อนแล้วตามด้วยไขว้ทแยงลูกศรสีเขียว จากล่างขึ้นบนตามลำดับ



$(2\times2=04)$	$(2\times3+1\times2=08)$	$(1\times3=06)$	
แนวตั้ง	แนวไขว้	แนวตั้ง	(ต้นฉบับ)

หรือ ผลคูณไขว้หนึ่งคู่ ผลบวกของผลคูณไขว้ทแยงสองคู่ ผลคูณไขว้หนึ่งคู่ (เป็นวิธีเทคนิคจำที่ง่าย)

ขั้นที่ 4 แต่คณิตศาสตร์ ต้องจบสิ้นที่การตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ด้วยวิธีการการยันความถูกต้อง (Cross Check) ด้วยการคัดออกเก้าหรือการคัดออกสิบเอ็ด

		การคัดออกเก้า	การคัดออกสิบเอ็ด	
$2 \quad 1$	$\rightarrow$	3	$1-2=$	-1
$\times$		$\times$		$\times$
$\underline{2 \quad 3}$	$\rightarrow$	$\underline{5}$	$3-2=$	$\underline{\underline{1}}$
$\underline{\underline{4 \;\; 8 \;\; 3}}$	$\rightarrow 6$	$\underline{\underline{15}} \rightarrow 6$	$3-8+4=-1$	$\underline{\underline{-1}}$

ข้อควรจำ 1. ผลคูณไขว้หนึ่งคู่ (ผลคูณแนวตั้ง) จะเป็นผลคูณตัวเลขสองตัว

2. ผลคูณไขว้ทแยงมากกว่าหนึ่งคู่ (ผลคูณไขว้) จะเป็นผลบวกของผลการคูณไขว้ทแยง

ข้อสังเกต การคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้เป็นการคูณที่มีลักษณะสมมาตรซ้ายขวาหรือสมมาตรแบบครึ่งซีกหรือสมมาตรแบบสมมาตรทวิภาค (bilateral symmetry)

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & & \times \\ \underline{2} & & \underline{3} \\ \boxed{{}_{0}4} & \boxed{{}_{0}8} & \boxed{3} \end{array} \quad = \quad \underbrace{483}$$

$$2\times2=04\,,2\times3+1\times2=08\,,1\times3=03$$

เรียก ผลคูณสมมาตร = ผลคูณสุทธิ

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ 94×49

วิธีคิด ดำเนินการคิดจากซ้ายไปขวาและขณะเดียวล่างขึ้นบนจากขวาไปซ้าย

ไขว้หนึ่งคู่ (แนวตั้ง)	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้หนึ่งคู่ (แนวตั้ง)
	(คูณจากล่างขึ้นบนคือลูกศรสีแดงไปลูกศรสีเขียว)	
สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร
$9 \quad 4$	$9 \quad 4$	$9 \quad 4$
$\underline{4 \quad 9}$	$\underline{4 \quad 9}$	$\underline{4 \quad 9}$
${}_{3}6$	${}_{0}4 \quad {}_{9}7$	$\dot{{}_{3}}\;\dot{{}_{9}6} \quad {}_{3}7 \quad 6 = 4606$
$(9\times4=36)$	$(9\times9+4\times4=97)$	$(9\times4=36)$

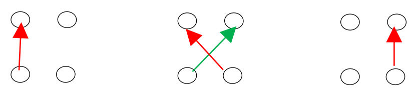
วิธีทำ **การยันความถูกต้อง** (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{cc} 9 & 4 \\ \underline{4} & \underline{9} \\ {}_3\boxed{6\;{}_9\,\boxed{7\;{}_3}} & \boxed{6} \end{array} \times \qquad \begin{array}{ccc} & 9 & 4 \\ & \underline{4} & \underline{9} \\ \dot{}\;\underline{6_{3\,9}} & \underline{7_3} & \underline{6} \end{array} \times = 4606 \to 7 \qquad \begin{array}{c} \to 4 \\ \times \\ \to \underline{4} \\ \underline{\underline{16}} \to 7 \end{array}$$

จะสังเกตได้ว่า

วิธีคูณไขว้ทแยงนี้จะเกิดพฤติกรรมการคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้ของต้นฉบับ ได้เองโดยอัตโนมัติในของมันเองโดยไม่ต้องจำ ผลคูณที่ได้ขั้นต้นนี้จึงเรียกว่าผลคูณสมมาตร **แล้ว** จึงหาผลคูณสุทธิด้วย “วิธีการบวกด้วยการจัดกลุ่มให้ครบสิบและกลุ่มไม่ครบสิบและการบวกด้วยวิธีการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า”

แผนภาพสรุป การคูณเลขสองจำนวนที่มีตัวเลข 2 หลักเท่ากัน



(1) (2) (1)

ให้พิจารณาการสมมาตรแบบสมมาตรทวิภาค (bilateral symmetry)

การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้นี้สามารถอธิบายการคูณเชิงพีชคณิตของสองพหุนามดีกรีหนึ่งได้ดังนี้

ให้ $(ax+b)(cx+d)=(ac)x^2+(ad+bc)x+bd$

ให้ $x=10$ ดังนั้น $(a\cdot 10+b)(c\cdot 10+d)=(ac)10^2+(ad+bc)10+bd$

นั่นคือ

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \underline{c} & \underline{d} \\ \multicolumn{2}{c}{\underline{\underline{ac/ad+cb/bd}}} \end{array} \times$$

พิจารณา ac เป็นการคูณแนวตั้ง

$ad+bc$ เป็นผลบวกการคูณแนวไขว้

bd เป็นการคูณแนวตั้ง

การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้

ในเวทคณิต เป็นการคูณด้วย สูตรที่ 3 สูตรอูรธวะ ติรยัคภยาม

(Sūtra 3. ūrdhva tiryagbhyāṃ = सूत्र ३. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्यां)

Ūrdhva Tiryagbhyām mean Vertically and crosswise)

Ūrdhva = อูรฺทฺธ. ค. สูง , ข้างบน (vertically)

Tiryag = ติรฌ. ค. อันข้ามแล้ว, อันพ้นแล้ว (horizontally) และ

bhyām = ภยาม (use both)

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้

1. $23 \times 21 =$	2. $14 \times 22 =$	3. $66 \times 43 =$	4. $39 \times 52 =$
5. $69 \times 96 =$	6. $23 \times 41 =$	7. $35 \times 47 =$	8. $52 \times 34 =$
9. $41 \times 37 =$	10. $69 \times 71 =$	11. $62 \times 53 =$	12. $45 \times 59 =$
13. $43 \times 68 =$	14. $33 \times 97 =$	15. $63 \times 79 =$	16. $65 \times 37 =$
17. $53 \times 76 =$	18. $81 \times 65 =$	19. $76 \times 76 =$	20. $85 \times 59 =$

4.3.2 การคูณเลขสองจำนวนที่มีตัวเลข 3 หลักเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณ 504×321

การดำเนินการคูณมี 5 ขั้นตอน ตามวิธีต้นฉบับ ตั้ง $\rightarrow$ ไขว้ $\rightarrow$ ไขว้และตั้ง $\rightarrow$ ไขว้ $\rightarrow$ ตั้ง

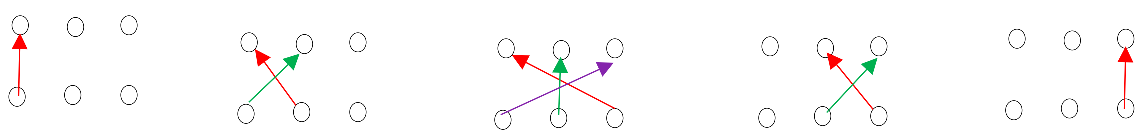
ดังนี้

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 0 & 4 & & \\ & & & & \times & \\ & \underline{3} & \underline{1} & \underline{2} & & \\ & \overset{5}{_1} & \overset{0}{_1} & \overset{7}{_0} & \overset{8}{_0} & 4 \\ _1 & & & & & \end{array} = 161784$$

เทคนิคการคูณ

เป็นการดำเนินการคูณจากซ้ายเลื่อนไปขวาและไขว้ทแยงจากล่างขึ้นบนแต่ต้องจากหลังไปหน้า

ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2	ขั้นที่ 3	ขั้นที่ 4	ขั้นที่ 5



5 0 4	5 0 4	5 0 4	5 0 4	5 0 4
3 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1
5 (1)	5 0 (1 1)	5 0 7 (1 1 1)	5 0 7 8 (1 1 1 0)	5 0 7 8 4 (1 1 1 0 0)
$(5\times5=15)$	$(5\times2+0\times3=10)$	$(5\times1+0\times2+4\times3)=17)$	$(0\times1+4\times2)=08)$	$(4\times1)=04)$
สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสองคู่สมมาตร	ไขว้หนึ่งคู่สมมาตร

ลำดับการคูณ ให้คูณจากล่างไปบนขณะเดียวกันขวาไปซ้าย จาก ลูกศรสีแดง $\rightarrow$ ลูกศรสีเขียว $\rightarrow$ สีม่วง ทุก ๆ ครั้งสำหรับการคูณตามลำดับ

โดยการเลื่อนการคูณสมมาตร (สังเกตเป็นการสมมาตรทวิภาค)

- ขั้นที่ 1 ไขว้หนึ่งคู่ (คือแนวตั้ง)
- ขั้นที่ 2 ไขว้ทแยงสองคู่ (คือแนวไขว้)
- ขั้นที่ 3 ไขว้ทแยงสามคู่ (คือแนวไขว้) เป็นแกนสมมาตร
- ขั้นที่ 4 ไขว้ทแยงสองคู่ (คือแนวไขว้) แต่สมมาตรทวิภาค
- ขั้นที่ 5 ไขว้หนึ่งคู่ (คือแนวตั้ง) และสมมาตรทวิภาค

เมื่อผลคูณ ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 5 จะได้เป็นผลคูณสมมาตร $\begin{array}{cccccc} & \overset{5}{_1} & \overset{0}{_1} & \overset{7}{_0} & \overset{8}{_0} & 4 \\ _1 \end{array}$

จากนั้นให้หาผลคูณสุทธิด้วยหาผลบวกของแต่ละหลัก $\begin{array}{cccccc} & \overset{5}{_1} & \overset{0}{_1} & \overset{7}{_0} & \overset{8}{_0} & 4 \\ _1 \end{array} = 161784$

ดังนั้นผลคูณสุทธิ คือ $504 \times 321 = 161784$

ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกเก้า $504 \times 321 = 161784 \rightarrow 0 \times 6 = 0$

การดำเนินการเช่นนี้เป็นเทคนิคที่ไม่ต้องจำและสามารถกระทำเป็นไปโดยอัตโนมัติ ไม่ต้องพะวงว่าจะกระทำแนวตั้งและแนวไขว้เมื่อไร ตรงไหน ถ้าจัดระบบการคูณให้เป็นระเบียบแล้วจะสามารถคิดเลขได้รวดเร็ว

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ 321×321

วิธีทำ การดำเนินการคูณจากซ้ายเลื่อนไปขวาและล่างขึ้นบนแต่ต้องข้างหลังไปข้างหน้า

ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2	ขั้นที่ 3	ขั้นที่ 4	ขั้นที่ 5
3 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1
$\underline{3 \quad 2 \quad 1}$	$\underline{3 \quad 2 \quad 1}$	$\underline{3 \quad 2 \quad 1}$	$\underline{3 \quad 2 \quad 1}$	$\underline{3 \quad 2 \quad 1}$
${}_{0}9$	${}_{0}9\;{}_{1}2$	${}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0$	${}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0\;{}_{0}4$	${}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0\;{}_{0}4\;{}_{0}1$
$(3 \times 3 = 09)$	$(3 \times 2 + 2 \times 3 = 12)$	$(3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 10)$	$(2 \times 1 + 1 \times 2 = 04)$	$(1 \times 1 = 01)$
สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสองคู่สมมาตร	ไขว้หนึ่งคู่สมมาตร

ผลคูณสมมาตร $\quad {}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0\;{}_{0}4\;{}_{0}1$

จากนั้นให้หา**ผลคูณสุทธิ** $\quad \dot{}\,{}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0\;{}_{0}4\;{}_{0}1 = 103041$

ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกเก้า $\quad 321 \times 321 = 103041$

$$6 \times 6 \rightarrow 36 \rightarrow 0 = 0$$

วิธีคิดในใจ

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 1 \\ \underline{3 \quad 2 \quad 1} \times \\ \dot{}\,{}_{0}9\;{}_{1}2\;{}_{1}0\;{}_{0}4\;{}_{0}1 = 103041 \end{array}$$

ผลลัพธ์ 5 ขั้นตอน คือ 09,12,10 สมมาตร 04 และ 01

ซึ่งสามารถคิดเลขในใจได้

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า) $6 \times 6 \rightarrow 36 \rightarrow 0$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 116×114

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 6 \\ \underline{1 \quad 1 \quad 4} \times \\ {}_{0}\,{}_{0}1\;{}_{1}2\;{}_{1}1\;{}_{2}0\;\,4 = 13224 \end{array}$$

ผลลัพธ์ 5 ขั้นตอน คือ 01, 02, 11 สมมาตร 10 และ 24

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า) $8 \times 6 \rightarrow 48 \rightarrow 3 = 3$

ตัวอย่างที่ 4 หาผลคูณของ 582×234

วิธีทำ

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 5 & 8 & 2 & \\
 & & & & & \times \\
 & & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \\
 & 0 & 1 & 8 & 8 & 8 \\
{}_{1} & {}_{3} & {}_{4} & {}_{3} & {}_{0} & \\
\hline
\end{array}
= 136188
$$

ผลลัพธ์ 5 ขั้นตอน คือ 10,31,48 สมมาตร 38 และ 08

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า) $6 \times 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 = 0$

ตัวอย่างที่ 5 หาผลคูณของ 532×472

วิธีทำ

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 5 & 3 & 2 & & \\
 & & & & \times & \\
 & \underline{4} & \underline{7} & \underline{2} & & \\
 & \dot{0} & \dot{7} & 9 & 0 & 4 \\
{}_{2} & {}_{4} & {}_{3} & {}_{2} & {}_{0} & \\
\hline\hline
\end{array}
= 251104
$$

ผลลัพธ์ 5 ขั้นตอน คือ 20,47,39 สมมาตร 20 และ 40

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า) $1 \times 4 = 4 \rightarrow 4 = 4$

ตัวอย่างที่ 6 หาผลคูณของ 785×472

วิธีทำ

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 7 & 8 & 5 & & \\
 & & & & \times & \\
 & \underline{3} & \underline{6} & \underline{2} & & \\
 & 1 & \dot{6} & 7 & 6 & 0 \\
{}_{2} & {}_{6} & {}_{7} & {}_{4} & {}_{1} & \\
\hline\hline
\end{array}
= 284170
$$

ผลลัพธ์ 5 ขั้นตอน คือ 21,66,77 สมมาตร 46 และ 10

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า) $2 \times 2 = 4 \rightarrow 4 = 4$

ความคิด การคูณเชิงพีชคณิตของสองพหุนามดีกรีสอง

ให้ $(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f) = adx^4+aex^3+afx^2$

$$bdx^3+bex^2+bfx$$

$$cdx^2+cex+cf$$

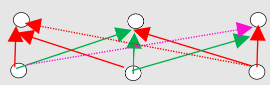
$$= adx^4+(ae+bd)x^3+(af+be+cd)x^2+(bf+ce)x+cf$$

ให้ $x=10$ ดังนั้น

$$\left(a\cdot 10^2+b\cdot 10+c\right)\times\left(d\cdot 10^2+e\cdot 10+f\right)$$

$$=(ad)10^4+(ae+bd)10^3+(af+be+cd)10^2+(bf+ce)10+cf$$

นั่นคือ $a \quad b \quad c$



$\times$

$d \quad e \quad f$

$$\underline{\underline{ad / ae+bd / af+be+cd / bf+ce / cf}}$$

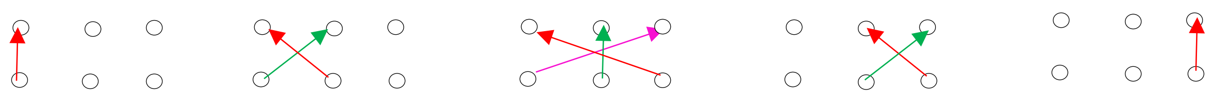
พิจารณา ad เป็นการคูณแนวตั้ง $ae+bd$ เป็นผลบวกการคูณแนวไขว้คู่

$af+be+cd$ เป็นผลบวกการคูณแนวไขว้คี่

$bf+ce$ เป็นผลบวกการคูณแนวไขว้คู่ cf เป็นการคูณแนวตั้ง

สรุปเป็นแผนภาพ ทั้ง 5 ขั้นตอนที่กล่าวข้างต้น **แบบต้นฉบับ**

ผลคูณแนวตั้ง	ผลคูณแนวไขว้	ผลคูณแนวไขว้	ผลคูณแนวไขว้	ผลคูณแนวตั้ง
1 :	2 :	3 :	2 :	1



สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสองคู่สมมาตร	ไขว้หนึ่งคู่สมมาตร
(เท่ากับแนวตั้ง)				(เท่ากับแนวตั้ง)

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้

1. $\begin{array}{r} 312 \\ \times \\ \underline{121} \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 432 \\ \times \\ \underline{323} \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 637 \\ \times \\ \underline{431} \end{array}$	4. $\begin{array}{r} 394 \\ \times \\ \underline{513} \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 453 \\ \times \\ \underline{321} \end{array}$	6. $\begin{array}{r} 589 \\ \times \\ \underline{697} \end{array}$	7. $\begin{array}{r} 365 \\ \times \\ \underline{432} \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 577 \\ \times \\ \underline{746} \end{array}$
8. $\begin{array}{r} 453 \\ \times \\ \underline{313} \end{array}$	10. $\begin{array}{r} 765 \\ \times \\ \underline{479} \end{array}$	11. $\begin{array}{r} 563 \\ \times \\ \underline{653} \end{array}$	12. $\begin{array}{r} 468 \\ \times \\ \underline{549} \end{array}$
13. $\begin{array}{r} 517 \\ \times \\ \underline{658} \end{array}$	14. $\begin{array}{r} 857 \\ \times \\ \underline{707} \end{array}$	15. $\begin{array}{r} 437 \\ \times \\ \underline{367} \end{array}$	16. $\begin{array}{r} 935 \\ \times \\ \underline{888} \end{array}$
17. $\begin{array}{r} 429 \\ \times \\ \underline{979} \end{array}$	18. $\begin{array}{r} 373 \\ \times \\ \underline{475} \end{array}$	19. $\begin{array}{r} 736 \\ \times \\ \underline{959} \end{array}$	20. $\begin{array}{r} 566 \\ \times \\ \underline{579} \end{array}$
21. $\begin{array}{r} 723 \\ \times \\ \underline{48} \end{array}$	22. $\begin{array}{r} 213 \\ \times \\ \underline{79} \end{array}$	23. $\begin{array}{r} 609 \\ \times \\ \underline{68} \end{array}$	24. $\begin{array}{r} 994 \\ \times \\ \underline{43} \end{array}$

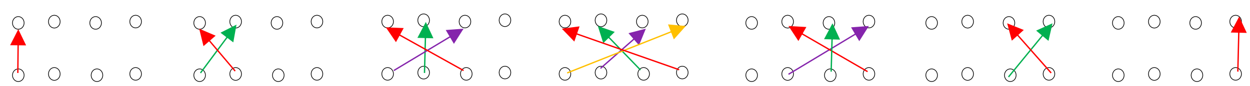
4.3.3 การคูณเลขสองจำนวนที่มีตัวเลข 4 หลักเท่ากัน

โดยการอุปนัย การคูณจำนวนสองจำนวนที่มีเลขสี่หลักที่เท่ากันทั้งคู่มี 7 ขั้นตอน มีลักษณะของการสมมาตรดังนี้

การดำเนินการคูณจากซ้ายเลื่อนไปขวาและไขว้ทแยงล่างขึ้นบนแต่ต้องหลังไปหน้า

ลำดับการคูณ ให้เริ่มที่ลูกศรสีแดง ก่อน สีเขียว สีม่วงทุก และ สีเหลือง ทุก ๆ ครั้งและต้องตามลำดับ

ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2	ขั้นที่ 3	ขั้นที่ 4	ขั้นที่ 5	ขั้นที่ 6	ขั้นที่ 7



1 : 2 : 3 : 4 : 3 : 2 : 1

สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสี่คู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้หนึ่งคู่

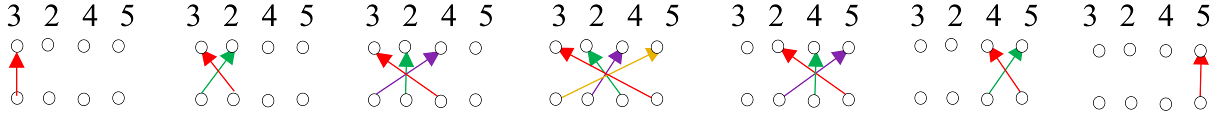
สมมาตร

หรือของต้นฉบับ

คูณแนวตั้ง คูณแนวไขว้ คูณแนวไขว้ คูณแนวไขว้ คูณแนวไขว้ คูณแนวไขว้ คูณแนวตั้ง

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 3245×2135

3 2 4 5   3 2 4 5   3 2 4 5   3 2 4 5   3 2 4 5   3 2 4 5   3 2 4 5



2 1 3 5   2 1 3 5   2 1 3 5   2 1 3 5   2 1 3 5   2 1 3 5   2 1 3 5

6	67	679	6795	67957	679575	6795755
0	0 0	0 0 1	0 0 1 3	0 0 1 3 2	0 0 1 3 2 3	0 0 1 3 2 3 2
สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้สองคู่	ไขว้สามคู่	ไขว้สี่คู่	ไขว้สามคู่	ไขว้สองคู่	ไขว้หนึ่งคู่
(เท่ากับแนวตั้ง)						(เท่ากับแนวตั้ง)

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

ดังนั้น 3 2 4 5 $\times$ $\rightarrow$ 5 $\times$

2 1 3 5 $\rightarrow$ 2

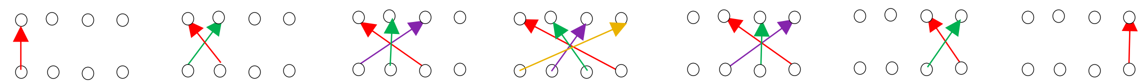
6 7 9 5 7 5 5 (0 0 1 3 2 3 2) $= 6928075 \rightarrow 1$ $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 1

ผลคูณสมมาตร = ผลคูณสุทธิ

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ 7896×5879

วิธีทำ

7 8 9 6	7 8 9 6	7 8 9 6	7 8 9 6	7 8 9 6	7 8 9 6	7 8 9 6



5 8 7 9	5 8 7 9	5 8 7 9	5 8 7 9	5 8 7 9	5 8 7 9	5 8 7 9
5 3	56 3 9	568 3 9 5 1	5681 3 9 5 2 1 2	56813 3 9 5 2 8 1 2 1	568133 3 9 5 2 8 2 1 2 1 1	5681334 3 9 5 2 8 2 5 1 2 1 1
สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่ (เท่ากับแนวตั้ง)	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสี่คู่	ไขว้ทแยงสามคู่	ไขว้ทแยงสองคู่	ไขว้หนึ่งคู่ (เท่ากับแนวตั้ง)

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

ดังนั้น

$$\begin{array}{r} 7\ 8\ 9\ 6 \\ \times \\ \underline{5\ 8\ 7\ 9} \\ \dot{\ }\ \ \underset{\substack{3}}{}\ \ \underset{\substack{9\\1}}{\dot{5}}\ \ \underset{\substack{5\\2}}{\dot{6}}\ \ \underset{\substack{2\\1}}{\dot{8}}\ \ \underset{\substack{8\\1}}{1}\ \ \underset{2}{3}\ \ \underset{5}{3}\ \ 4 = 46420584 \rightarrow 6 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} \rightarrow\ 3 \\ \qquad \times \\ \rightarrow\ \underline{2} \\ \rightarrow\ \underline{\underline{6}} \rightarrow 6 \end{array}$$

หรือใช้วิธีหาผลบวกของผลคูณแนวตั้งและแนวไขว้ด้วยการบวกด้วยสูตรศุทธ

วิธีทำ

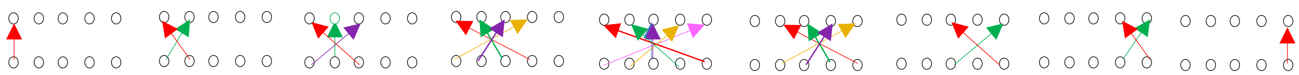
$$\begin{array}{r} 7\quad 8\quad 9\quad 6 \\ \times \\ \underline{5\quad 8\quad 7\quad 9} \\ |35|96|158|221|183|123|54| = 46420584 \end{array}$$

4.3.4 การคูณเลขสองจำนวนที่มีตัวเลข 5 หลักเท่ากัน

การดำเนินการคูณจากซ้ายเลื่อนไปขวาและไขว้ทแยงล่างขึ้นบนแต่ต้องหลังไปหน้า

ลำดับการคูณ ให้เริ่มที่ลูกศรสีแดง ก่อน สีเขียว สีม่วงทุก และ สีเหลือง ทุก ๆ ครั้งและต้องตามลำดับ

ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2 ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 4 ขั้นที่ 5 ขั้นที่ 6 ขั้นที่ 7

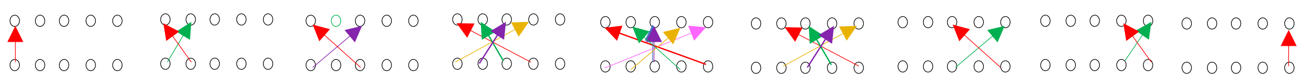


(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	แกนสมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร	สมมาตร
ไขว้หนึ่งคู่	ไขว้สอง	ไขว้สาม	ไขว้สี่	ไขว้ห้า	ไขว้สี่	ไขว้สาม	ไขว้สอง	ไขว้หนึ่ง

สมมาตรซ้าย แกนสมมาตร สมมาตรขวา

ตัวอย่าง หาผลคูณของ 45837×21394

วิธีทำ



4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7	4 5 8 3 7
2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4	2 1 3 9 4
|08|	|14|	|33|	|65|	|102|	|108|	|80|	|75|	|28|

เพราะฉะนั้น

ตรวจสอบความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & 8 & 3 & 7 & & \rightarrow & 0 \\ \times & & & & & & & & \times \\ & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{9} & \underline{4} & & \rightarrow & \underline{1} \end{array}$$

$$|08|14|33|65|102|108|80|75|28| = 980636778 \rightarrow 0 \qquad \underline{\underline{0}}$$

เป็นการใช้วิธีหาผลบวกของผลคูณด้วยการบวกด้วยสูตรศุทธ

หรือใช้วิธีหาผลคูณสมมาตรจากซ้ายไปขวาแล้วหาผลคูณสุทธิอีกที

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccccccc} & 4 & 5 & 8 & 3 & 7 & & & & \\ \times & & & & & & & & & \\ & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{9} & \underline{4} & & & & \\ \hline {}_0 & 8_{1} & \dot{4}_{3} & 3_{\substack{6\\1}} & 5_{\substack{0\\1}} & \dot{2}_{0} & 8_{8} & 0_{7} & 5_{2} & 8 \end{array} = 980,636,778$$

ผลคูณสมมาตร = ผลคูณสุทธิ

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้

1. 1332×4332	2. 4123×1324	3. 6363×4351	4. 4994×5153
5. 5415×6336	6. 6037×3040	7. 8338×3123	8. 1563×6308
9. 8484×4848	10. 4123×7337	11. 6132×4224	12. 2348×6969
13. 5526×276	14. 3132×336	15. 6117×727	16. 3969×840
17. 7326×94	18. 7609×57	19. 8794×99	20. 8291×75
21. 43488×31371	22. 14867×25471	23. 70367×30935	24. 85887×24414
25. 50235×3488	26. 61543×6237	27. 70771×4171	28. 64870×19183
29. $32 \cdot 11 \times 88.51$	30. $54 \cdot 86 \times 62.37$	31. $72 \cdot 06 \times 6.37$	32. $41 \cdot 66 \times 12.37$

4.3.5 การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้โดยการเลื่อนคูณ (Moving Multiplication)

ในกรณที่มีตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนหลักไม่เท่ากันนั้น เราจะใช้วิธีการคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้โดยการเลื่อนคูณ (Moving Multiplication)

แต่ก่อนจะศึกษาวิธีข้างต้น ให้เราลองใช้วิธีคูณแบบเดิมที่คูณเลขสองจำนวนมีหลักเท่ากัน โดยเติมศูนย์ (0) ลงไปบนหลักแล้วทำให้เลขสองจำนวนมีหลักเท่ากัน (แต่ศูนย์ที่เติมนั้นจะต้องทำให้ค่าคงเดิม) เช่น 594×21 ให้เติม เติมศูนย์ (0) บนหลักร้อยของ 21 เป็น 021 ก็จะได้เลขสองจำนวนข้างต้น เป็น 594×021 ที่มีจำนวนหลักเท่ากันเพื่อสามารถหาผลคูณได้ตามเงื่อนไขการคูณด้วยสูตรนิขิลัม แต่การกระทำแบบนี้ไม่เหมาะกับการศึกษาวิธีคิดเลขเร็ว เนื่องจากไม่ได้ลดขั้นตอนการคิดเลขเร็ว ดังแสดงผลการคูณ ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 594×21

วิธีทำ

$$\begin{array}{rrrrr} & 5 & 0 & 4 & \\ & 0 & 2 & 1 & \times \\ \hline 0 & 0 & 5 & 8 & 4 \\ {}_{0\;1} & {}_{0} & {}_{0} & {}_{0} & \end{array}$$

การคูณมี 5 ขั้นตอน คือ $(5 \times 0 = 00)$, $(5 \times 2 + 0 \times 0 = 10)$ $(5 \times 1 + 0 \times 2 + 4 \times 0 = 05)$ สมมาตร 08 และ 04

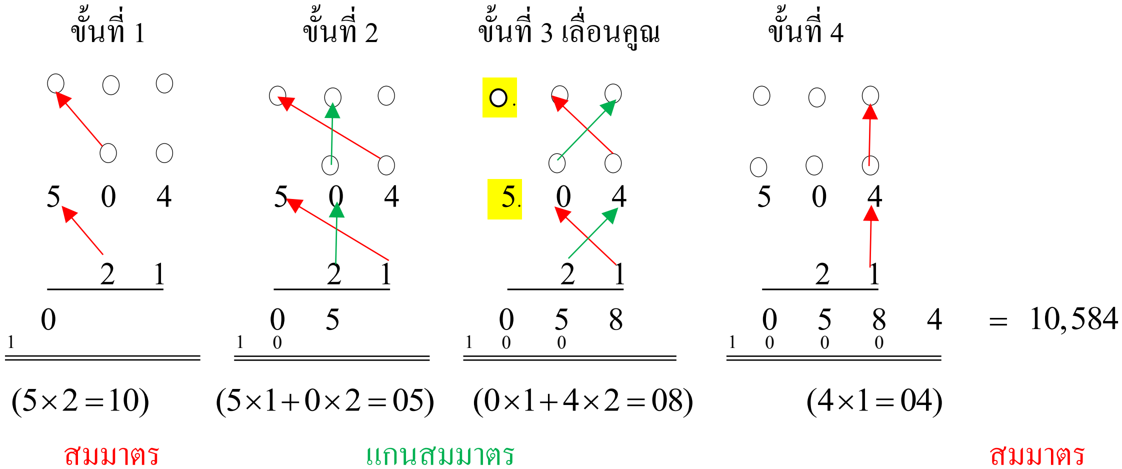
แต่วิธีข้างต้นช้าไปหนึ่งน้อยหนึ่งขั้นตอน จึงไม่เหมาะกับการคิดเลขเร็ว เนื่องจากการศึกษาการคิดเลขเร็วย่อมต้องมีความเป็นเอกลักษณ์ ในขณะเดียวกันก็มีความหลากหลาย ดังนั้นในกรณีที่ตัวตั้งและตัวคูณมีจำนวนเลขหลักไม่เท่ากัน เราสามารถนำวิธีการคูณแนวตั้งและแนวไขว้มาประยุกต์ใช้ได้โดย

การเลื่อนคูณ (Moving Multiplication)

ซึ่งสามารถคิดจากซ้ายไปขวาขณะเดียวกันก็ยังใช้การคูณไขว้ทแยงจากล่างไปบน (จากขวาไปซ้ายเหมือนเดิม) โดยไม่ต้องจำว่าเมื่อไหรคูณแนวตั้งและเมื่อไหร่คูณแนวไขว้ (แบบต้นฉบับ) ได้อีกด้วย เป็นวิธีธรรมชาติโดยอัตโนมัติแต่ผลคูณได้ความหมายเช่นเดิม ซึ่งสามารถลดขั้นตอนการคำนวณและคิดได้รวดเร็ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

วิธีทำ เทคนิคการคูณโดยการเลื่อนคูณไขว้ทแยง

เป็นการดำเนินการคูณจากซ้ายเลื่อนไปขวาและล่างขึ้นบนแต่ต้องข้างหลังไปข้างหน้า จะเหลือ 4 ขั้นตอน



ลำดับการคูณ ให้เริ่มที่ ลูกศรสีแดง ไป สีเขียว ทุก ๆ ครั้งและต้องจากล่างขึ้นบน (ขวาไปซ้าย) <u>ตามลำดับ</u> โดยการเลื่อนคูณทแยง (สังเกตการสมมาตรทวิภาค)

- ขั้นที่ 1 คูณไขว้หนึ่งคู่ (คือแนวตั้ง)
- ขั้นที่ 2 ผลคูณไขว้สองคู่ (คือแนวไขว้)
- ขั้นที่ 3 ปิดตัวเลขตำแหน่งแรกซ้ายสุดของตัวตั้งไขว้คู่ (คือแนวไข้)
- ขั้นที่ 4 ไขว้สองคู่ (คือแนวไขว้) แต่สมมาตรทวิภาค

เมื่อผลคูณ ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 4 จะได้เป็นผลคูณสมมาตร $\begin{array}{ccccc} & \boxed{0} & \boxed{5 \quad 8} & \boxed{4} \\ 1 & 0 & 0 \quad 0 & \end{array}$

จากนั้นให้หาผลคูณสุทธิด้วยหาผลบวกของแต่ละหลัก $\begin{array}{ccccc} & 0 & 5 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array} = 10,584$

ดังนั้นผลคูณสุทธิ คือ $594 \times 21 = 10,584$

ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกเก้า $594 \times 21 = 10,584 \rightarrow 0 \times 3 = 0$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ 986×67

วิธีทำ ใช้ด้วยการเติม ศูนย์ ให้มีจำนวนหลักเท่ากับตัวตั้ง

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 8 & 6 & & \\ & & & & \times & \\ & \underline{0} & \underline{6} & \underline{7} & & \\ & 0 & \dot{4} & 1 & 2 & 2 = 66062 \\ 0 & \overset{}{5}_{1} & 1 & 9 & 4 & \end{array}$$

การคูณมี 5 ขั้นตอน คือ $(9 \times 0 = 00)$, $(9 \times 6 + 8 \times 0 = 54)$ $(9 \times 7 + 8 \times 6 + 6 \times 0 = 111)$ สมมาตร $(8 \times 7 + 6 \times 6 = 92)$ และ $(6 \times 7 = 42)$

หรือ **โดยการเลื่อนตัวคูณ**

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 8 & 6 & \\ & & & \times & \\ & & \underline{6} & \underline{7} & \\ & \dot{4} & 1 & 2 & 2 = 66062 \\ 5_{1} & 1 & 9 & 4 & \end{array}$$

การคูณมี 4 ขั้นตอน คือ $(9 \times 6 = 54)$, $(9 \times 7 + 8 \times 6 = 111)$ $(8 \times 7 + 6 \times 6 = 92)$ และสมมาตร $(6 \times 7 = 42)$

ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกเก้า $986 \times 67 = 66062 \rightarrow 5 \times 4 = 20 \rightarrow 2 = 2$

โดยประจักษ์ จะเห็นได้ชัดเจนว่าการคูณในกรณีที่เลขสองจำนวนคูณกันที่จำนวนหลักไม่เท่ากัน ใช้วิธีการเลื่อนคูณ จะลดขั้นตอนการคำนวน ได้มากจึงเหมาะกับที่จะเลือกเป็นวิธีคิดเลขเร็วได้ดีที่สุด

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่จะเน้นการคิดเลขเร็วสำหรับการคูณด้วยใช้วิธีการเลื่อนคูณไขว้

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 5837×39

วิธีทำ โดยการเลื่อนตัวคูณ

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 8 & 3 & 7 & \times \\ & & & 3 & 9 & \\ \hline & 5 & 9 & 1 & 8 & 3 = 227643 \\ _1 & _6 & _8 & _4 & _6 & \\ \hline\hline \end{array}$$

การคูณมี 4 ขั้นตอน คือ $(5\times3=15)$, $(5\times9+8\times3=69)$ $(8\times9+3\times3=81)$, $(3\times9+7\times3=48)$ สมมาตร $(7\times9=63)$

ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกเก้า $5837\times39=227643 \;\rightarrow\; 5 \times 3 = 15 \rightarrow 6 = 6$

ดังกล่าวมาแล้วข้างต้น "วิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตได้ให้ความความหลากหลาย รูปแบบการคิด และอินโฟกราฟิก (Diversity, Thinking Styles, and Infographics) ที่ทำให้ได้มีทางเลือกสำหรับการคิดเลข เพิ่มจากวิธีดั้งเดิมที่มีอยู่

ตัวอย่างที่ 4 หาผลคูณ 4321×321

วิธีทำ ในทำนองเดียวกันให้ดำเนินการคิดวิธีการเลื่อนคูณไขว้ ดังกล่าวมาแล้วข้างต้น

ขั้นตอนการคูณเป็นดังนี้

(1)
$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ & & 3 & 2 & 1 & \times \\ \hline & 2 & & & & \\ _1 & & & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

การคูณก็เช่นเดียวกับการคูณข้างต้น

เขียนตัวคูณ 321 ตรงตำแหน่งซ้ายสุดเช่นเดียวกับวิธีดั้งเดิม แล้ว หาผลคูณไขว้หนึ่งคู่ (ตามแนวตั้ง) ทางซ้ายสุด $4\times3=12$

(2)
$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ & 3 & 2 & 1 & & \times \\ \hline & 2 & 7 & & & \\ _1 & _1 & & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

หาผลบวกของผลการคูณไขว้ทแยงสองคู่ $4\times2+3\times3=17$ ตามลำดับ

(3)
$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & & 3 & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & \\ _1 & _1 & _1 & & \\ \hline\hline \end{array}$$

หาผลบวกของผลการคูณไขว้ทแยงสามคู่ $4\times1+3\times2+2\times3=16$

(4)
$$\begin{array}{cccccc} & \boxed{4.} & 3 & 2 & 1 & \\ & & 3 & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 & \\ _1 & _1 & _1 & _1 & & \\ \hline\hline \end{array}$$

จากนั้นเลื่อนไปทางขวาที่ตำแหน่งที่ 2 ของตัวตั้ง

หรือใชวิธีปิด เลข 4 ตำแห่งนี้เสมือนเราเลื่อนคูณ ไปกลุ่มตัวเลขอีกกลุ่มหนึ่ง แล้วหาผลคูรไขว้ทแยงสามคู่ $3\times1+2\times2+3\times1=10$

(5) 4. 3 2 1 — จะเห็นได้ว่าเริ่มเกิดการสมมาตร

3 2 1 — หาผลบวกของผลการคูณไขว้สองคู่ $2\times1+1\times2=04$

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 7 & 6 & 0 & 4 \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & \end{array}$$

(6) 4. 3 2 1 — ขั้นสุดท้ายขวาสุด หาผลคูณไขว้หนึ่งคู่ (ตามแนวตั้ง) $1\times1=01$

3 2 1 — ได้ผลคูณสมมาตรทวิภาค

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 7 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & \end{array} = 1387041$$ เป็นผลคูณสุทธิ

ตรวจสอบความถูกต้อง **คัดออกเก้า** **คัดออกสิบเอ็ด**

ดังนั้น 4 3 2 1	$\rightarrow$ 1	$1-2+3-4=$	-2
$\times$	$\times$		$\times$
3 2 1	$\rightarrow$ $\underline{6}$	$1-2+3=$	$\underline{2}$
1 3 8 7 0 4 1 $\rightarrow 6$	$\underline{\underline{6}} \rightarrow 6$	$1-4+0-7+8-3+1=-4$	$\underline{\underline{-4}}$

ในกรณีที่ตัวตั้งมีจำนวนหลักมากกว่าตัวคูณ ตั้งแต่ 2 หลักขึ้นไป การใช้เทคนิคการเลื่อนคูณไขว้ จะกระทำได้ยาก ให้ใช้วิธีปิดให้ตัวเลขทางขวาสุดของตัวตั้ง เหลือตัวเลขทางซ้ายของตัวตั้งให้มีจำนวนจำนวนหลักของตัวตั้งเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณ

จากนั้นให้ ดำเนินการคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้ แต่ต้องสิ้นสุดที่แนวไขว้ทแยง (จำนวนเส้นแนวไขว้ทแยงต้องเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณ)

ในทำนองเดียวกัน ให้เลื่อนปิดตัวเลขของตัวตั้งนี้ไปทางขวาหนึ่งหลัก แต่เมื่อเลื่อนแล้วจะต้องยังคงมีตัวเลขของตัวตั้งให้มีจำนวนหลักเท่ากับตัวคูณเช่นเดิม ดังนั้นจะพบว่า “ต้องปิดตัวเลขทางขวาของตัวตั้งด้วย” เพื่อให้ได้จำนวนตัวเลขของตัวตั้งเท่าจำนวนตัวเลขของตัวคูณนั้น ตามที่ต้องการแล้วให้ดำเนินการคูณไขว้ทแยง (โดยจำนวนเส้นแนวไขว้ต้องเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณเท่านั้น) เมื่อหาผลคูณไขว้เสร็จแล้วให้ดำเนินการเลื่อนในทำนองเดียวกับข้างต้น

เมื่อการลื่อนนั้นเลื่อนไปจนครบถึงขั้นสุดท้ายของการเลื่อน (คือเหลือจำนวนตัวเลขของตัวตั้งเท่ากับจำนวนตัวเลขของตัวคูณ) ในดำเนินการคูณไขว้ทแยงแบบปกติ คือต้องเริ่มที่แนวไขว้ไปสิ้นสุดที่แนวตั้ง ดังที่จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 หาผลคูณของ 37824×325

วิธีทำ พิจารณามีการเลื่อนคูณ 3 ครั้ง

ครั้งที่ 1 เนื่องจากตัวคูณมีสามหลัก ตัวตั้งมีห้าหลัก ให้ปิด ตัวเลขสองหลักทางขวาสุดของตัวตั้ง ก็จะเหลือ

3 7 8 2 4. ตัวเลขสามหลักทางหน้าของตัวตั้งพอดี

บนตัวตั้งนี้ คือ ปิด 378 หาผลคูณ 378 กับ 325

3 2 5 ไขว้หนึ่ง $3\times3=09$

$_0 9_2\ 7_5\ 3$ ผลบวกของผลคูณไขว้ทแยงสองคู่ $3\times2+7\times3=27$

ผลบวกของผลคูณไขว้ทแยงสามคู่ $3\times5+7\times2+8\times3=53$

ครั้งที่ 2 เลื่อนปิดตัวเลขถัดไปของตัวตั้งหนึ่งตัว คือ 3 ขณะเดียวกันก็ไปปิดตัวเลขข้างหลังสุดของตัวตั้งหนึ่งตัว

3. 7 8 2 4. คือ 4 ก็จะเหลือตัวเลขของตัวตั้งสามตัวตาม คือ 782 ที่ต้องใช้สำหรับ

เป็นตัวตั้งสำหรับการคูณกับตัวคูณ 325 ที่มีจำนวนหลักเท่ากัน

3 2 5 แล้วดำเนินการคูณไขว้ทแยงสามคู่ $7\times5+8\times2+2\times3=57$

$_0 9_2\ 7_5\ 3_5\ 7$

ครั้งที่ 3 ในทำนองเดียวกันให้ เลื่อนปิดตัวเลขถัดไปของตัวตั้งอีกหนึ่งตัวคือ 7 แต่พบว่าเหลือตัวเลขของ

3 7. 8 2 4 ตัวตั้งเพิ่มเป็นจำนวนสามตัวพอดี คือ 824

$\times$ ซึ่งมีจำนวนตัวหลักเท่ากันพอดี และเป็นการสิ้นสุดการเลื่อน

3 2 5 แล้วดำเนินการคูณไขว้ทแยง ขั้นสุดท้าย ของ 824 กับ 325

$_0 9_2\ 7_5\ 3_5\ 7_5\ 6_1\ 8_2\ 0$ เป็นผลคูณไขว้ทแยงสามคู่ $8\times5+2\times2+4\times3=56$

(เป็นผลคูณสมมาตร) ผลคูณไขว้ทแยงสองคู่ $2\times5+4\times2+=18$

และไขว้ทแยงหนึ่งคู่ (แนวตั้ง) $4\times5=20$

ดังนั้น ผลคูณสุทธิ 12292800

ตรวจสอบความถูกต้อง ด้วยวิธีคัดออกเก้า

$37824\times325 = 12292800 \rightarrow 6 \times 1 = 6$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 6 หาผลคูณของ 678345×587

วิธีทำ พิจารณามีการเลื่อนคูณ 4 ครั้ง

ครั้งที่ 1 เนื่องจากตัวคูณมีสามหลัก ตัวตั้งมีหกหลัก ให้ปิด ตัวเลขสามหลักทางขวาสุดของตัวตั้ง ก็จะเหลือ

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5. \\ & & & & & & \times \\ & & & & 5 & 8 & 7 \\ \hline {}_{3} & 0_{\substack{8\\1}} & 3_{3} & 8 & & & \\ \hline\hline \end{array}$$

ตัวเลขสามหลักทางหน้าของตัวตั้งพอดี

บนตัวตั้งนี้ คือ ปิด 345 แล้วหาผลคูณ 678 กับ 587

ไขว้หนึ่ง $6 \times 5 = 30$

ผลบวกของผลคูณไขว้ สองคู่ $8 \times 6 + 5 \times 7 = 83$

ผลบวกของผลคูณไขว้สามคู่ $6 \times 7 + 7 \times 8 + 8 \times 5 = 138$

ครั้งที่ 2 เลื่อนปิดตัวเลขถัดไปของตัวตั้งหนึ่งตัว ขณะเดียวกันก็ไปปิดตัวเลขข้างหน้าสุดของตัวตั้งหนึ่งตัว

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 6. & 7 & 8 & 3 & 4 & 5. \\ & & & & 5 & 8 & 7 \\ \hline {}_{3} & 0_{\substack{8\\1}} & 3_{\substack{3\\1}} & 8_{2} & 8 & & \\ \hline\hline \end{array}$$

ก็จะเหลือตัวเลขของตัวตั้งที่ต้องใช้สำหรับการคูณกับตัวคูณที่มีจำนวนหลักเท่ากัน แล้วดำเนินการคูณไขว้ แต่จำนวนเส้นไขว้ต้องเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณ

บนตัวตั้งนี้คือ เลื่อนจาก 3 ไปปิดตัวเลขถัดไปคือ 4 และ 5

ขณะเดียวกันก็ต้องปิด ตัวเลขตัวหน้าของตัวตั้งหนึ่งหลักคือ 6 จะเหลือ ตัวเลขสามตัวของตัวตั้งเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณ ดังนั้น หาผลคูณ 783 กับ 587 เป็นผลบวกของผลคูณไขว้สาม

$7 \times 7 + 8 \times 8 + 3 \times 5 = 128$

ครั้งที่ 3 ในทำนองเดียวกันให้ เลื่อนปิดตัวเลขถัดไปของตัวตั้งอีกหนึ่งตัว ขณะเดียวกันก็ไปปิดตัวเลข

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 6 & 7. & 8 & 3 & 4 & 5. \\ & & & & & & \times \\ & & & & 5 & 8 & 7 \\ \hline {}_{3} & 0_{\substack{8\\1}} & 3_{\substack{3\\1}} & 8_{\substack{2\\1}} & 8_{0} & 0 & \\ \hline\hline \end{array}$$

ข้างหน้าของตัวตั้งเพิ่มเป็นสองตัว

ก็จะเหลือตัวเลขของตัวตั้งที่ต้องใช้สำหรับการคูณกับตัวคูณที่มีจำนวนหลักเท่ากัน แล้วดำเนินการคูณไขว้ แต่จำนวนเส้นไขว้ต้องเท่ากับจำนวนหลักของตัวคูณ หาผลคูณ 834 กับ 587 เป็น

เป็นผลบวกของผลคูณไขว้สาม $8 \times 7 + 8 \times 3 + 4 \times 5 = 100$

ครั้งที่ 4 ในทำนองเดียวกันให้ เลื่อนปิดตัวเลขถัดไปของตัวตั้งอีกหนึ่งตัว ขณะเดียวกันก็ไปปิดตัวเลขข้างหน้าของตัวตั้งเพิ่มเป็นสามตัว คือเลื่อนปิด 678 เหลือ 345 แล้วหาผลคูณ 345 กับ 587

$$\begin{array}{cccccccc} & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & \\ & & & & & & & \times \\ & & & & 5 & 8 & 7 & \\ \hline & 0 & 3 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 5 \\ {}_{3} & {}_{\substack{8\\1}} & {}_{\substack{3\\1}} & {}_{\substack{2\\1}} & {}_{0} & {}_{7} & {}_{6} & {}_{3} & \\ \hline\hline \end{array}$$

ผลบวกของผลคูณแนวไขว้สามคู่ $7\times3+8\times4+5\times5=78$

ผลบวกของผลคูณแนวไขว้สองคู่ $7\times4+8\times5=68$

(เป็นผลคูณสมมาตร) และไขว้หนึ่งคู่ (แนวตั้ง) $5\times7=35$

ดังนั้น

$$\begin{array}{cccccccc} & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & \\ & & & & & & & \times \\ & & & & 5 & 8 & 7 & \\ \hline & 0 & \dot{3} & 8 & 8 & \dot{0} & \dot{8} & 8 & 5 \\ {}_{3} & {}_{\substack{8\\1}} & {}_{\substack{3\\1}} & {}_{\substack{2\\1}} & {}_{0} & {}_{7} & {}_{6} & {}_{3} & \\ \hline\hline \end{array} = 398188515$$ (ผลคูณสุทธิ)

ตรวจสอบความถูกต้อง ด้วยวิธีคัดออกเก้า

$678345\times587=398188515 \rightarrow 6 \times 2 = 12$ เป็นจริง

ข้อสังเกต จะเห็นได้ว่า การคูณไขว้หนึ่งคู่ (แนวตั้ง) จะเกิดขึ้น "ทุกเริ่มต้นและทุกสิ้นสุดของขั้นตอนการคูณเสมอ" ส่วนการคูณแนวไขว้ "จะเกิดขึ้นในทุก ๆ ตำแหน่งตรงกลาง"

ตัวอย่างที่ 7 หาผลคูณของ 54322×3243

วิธีทำ ขั้นตอนการเลื่อนคูณแนวตั้งและแนวไขว้

1.
$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 2 & 4 & 3 \\ \hline {}_{1}\,5 & & & & \\ \hline \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 2 & 4 & 3 \\ \hline {}_{1}\,5 & \underset{2}{2} & & & \\ \hline \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 2 & 4 & 3 \\ \hline {}_{1}\,5 & \underset{2}{2} & \underset{3}{7} & & \\ \hline \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 2 & 4 & 3 \\ \hline {}_{1}\,5 & \underset{2}{2} & \underset{3}{7} & \underset{4}{3} & \\ \hline \end{array}$$

5. 5 4 3 2 2

3 2 4 3

$_{1}\;5_{2}\;2_{3}\;7_{4}\;3_{3}\;4$

5. 5 4 3 2 2

3 2 4 3

$_{1}\;5_{2}\;2_{3}\;7_{4}\;3_{3}\;4_{2}\;1$

7. 5 4 3 2 2

3 2 4 3

$_{1}\;5_{2}\;2_{3}\;7_{4}\;3_{3}\;4_{2}\;1_{1}\;4$

8. 5 4 3 2 2

3 2 4 3

$_{1}\;5_{2}\;2_{3}\;7_{4}\;3_{3}\;4_{2}\;1_{1}\;4_{0}\;6$

สรุป 5 4 3 2 2 ×

3 2 4 3

$_{1}\;5_{2}\;2_{3}\;7_{4}\;3_{3}\;4_{2}\;1_{1}\;4$ = 176166246

ผลคูณสมมาตร ผลคูณสุทธิ

แบบฝึกหัดชุดที่ 5 การคูณโดยการเลื่อนตัวคูณ

1. 1 1 3 × 1 3

2. 1 2 1 × 7 4

3. 1 2 3 × 2 7

4. 1 0 4 × 3 4

5. 2 0 1 × 7 3

6. 3 1 6 × 8 9

7. 6 2 7 × 7 8

8. 6 0 2 × 6 3

9. 1 2 1 4 × 3 4

10. 5 3 2 4 × 5 8

11. 3 2 1 4 × 8 7

12. 3 2 5 4 × 6 8

13. $\begin{array}{r} 1\ 3\ 2\ 5\ 7 \\ \times\quad 5\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

14. $\begin{array}{r} 2\ 4\ 3\ 6\ 8 \\ \times\quad 2\ 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

15. $\begin{array}{r} 2\ 6\ 7\ 9\ 0 \\ \times\quad 8\ 9 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

16. $\begin{array}{r} 6\ 9\ 7\ 4\ 8 \\ \times\quad 4\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

17. $\begin{array}{r} 5\ 2\ 2\ 5\ 6 \\ \times\quad 6\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

18. $\begin{array}{r} 6\ 3\ 1\ 3\ 4 \\ \times\quad 8\ 6 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

19. $\begin{array}{r} 9\ 6\ 4\ 8\ 1 \\ \times\quad 4\ 9 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

20. $\begin{array}{r} 4\ 7\ 8\ 9\ 3 \\ \times\quad 7\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

21. $\begin{array}{r} 7\ 6\ 1\ 9 \\ \times\quad 2\ 5\ 6 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

22. $\begin{array}{r} 8\ 2\ 9\ 6 \\ \times\quad 6\ 8\ 5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

23. $\begin{array}{r} 9\ 1\ 9\ 2 \\ \times\quad 4\ 3\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

24. $\begin{array}{r} 1\ 8\ 7\ 6 \\ \times\quad 9\ 4\ 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

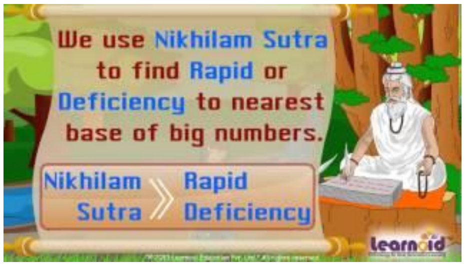
25. $\begin{array}{r} 1\ 2\ 8\ 1\ 2 \\ \times\quad 2\ 5\ 4 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

26. $\begin{array}{r} 3\ 5\ 4\ 7\ 9 \\ \times\quad 5\ 4\ 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

27. $\begin{array}{r} 7\ 6\ 3\ 8\ 9 \\ \times\quad 9\ 7\ 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

28. $\begin{array}{r} 9\ 6\ 7\ 6\ 7 \\ \times\quad 9\ 0\ 3 \\ \hline \\ \hline \end{array}$

4.4 การคูณด้วยสูตรนิขิลัม



การคูณด้วยสูตรนิขิลัม เป็นการคูณรูปแบบเฉพาะ ใช้ได้ดีกับตัวตั้งและตัวคูณมีค่าใกล้จำนวนกำลังของสิบ (power of 10) หรือเลขชี้กำลังจำนวนเต็มบวกของ 10 ได้แก่

$10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, \ldots, 10^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า "ฐานหลัก (Theoretical Base)"

การคูณด้วยสูตรนิขิลัมจึงเหมาะกับการคูณเลขสองจำนวน เช่น

996×998 จะเห็นได้ว่าสองจำนวนนี้มีค่าเข้าใกล้ 1000

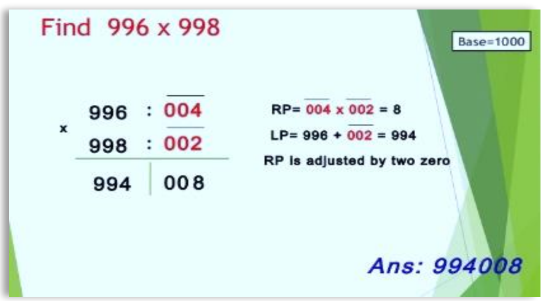
หรือในทำนองเดียวกัน 99979×99999 สองจำนวนนี้มีค่าเข้าใกล้ 100000

หรือ 1000001×999998 สองจำนวนนี้มีค่าเข้าใกล้ 1000000 เป็นต้น

แล้วทำไมการคูณด้วยสูตรนิขิลัมจึงทำให้หาผลลัพธ์ของการคูณได้เร็ว ? มีเทคนิคการคิดเลขเร็วอย่างไร

ทีนี้มาลองพิจารณา ขบวนการคิดวิธีการคูณด้วยสูตรนิขิลัมนั้นเป็นอย่างไร

เช่นต้องการหาผลคูณของ $996 \times 998 = 994008$



จากตัวอย่างที่แสดงทางซ้ายมือใช้แค่สองบรรทัดไม่มีการทด ใช้เวลาไม่กี่วินาทีก็หาคำตอบได้

ด้วยการคิดในใจ (Mental Arithmetic) แล้ว

"วิธีคิดเลขเร็วและสามารถคิดในใจคิดอย่างไร?"

เคล็ดลับอยู่ที่ค่าเบี่ยงฐาน (Deficiency)

ดังนั้นก่อนอื่น ต้องพิจารณาว่าเลขสองจำนวนที่จะนำมาคูณกันนี้มีค่าเข้าใกล้ฐานหลักอะไร ในที่นี้คือฐานหลัก 1000 และแล้วก็ปรับเลขสองจำนวนที่เป็นตัวตั้งและตัวคูณนี้ให้อยู่ในรูปฐานหลัก ดังนี้ $996 = 1000 - 4$ และ $998 = 1000 - 2$

แต่เมื่อสังเกตในแง่กลับกันถ้านำตัวตั้งลบด้วยฐานหลัก $(996 - 1000 = -4)$

และตัวคูณลบด้วยฐานหลัก $(998 - 1000 = -2)$

ผลต่างทั้งสองนี้ คือ -4 และ -2 ถูกเรียกว่า "**ค่าเบี่ยงฐาน (Deficiency)**"

ดังนั้น ค่าเบี่ยงฐานก็คือผลต่างระหว่างตัวตั้งกับฐานหลัก และในทำนองเดียวกันผลต่างระหว่างตัวคูณ กับฐานหลัก เนื่องจากตัวตั้งและตัวคูณมีค่าน้อยกว่าฐานหลัก **ค่าเบี่ยงฐานจึงมีค่าเป็นจำนวนลบ**

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นวิธีปกติที่เราคุ้นเคยกันอยู่ แต่ในเวทคณิตปรับค่าเบี่ยงฐานให้เหมาะการคิดเลขเร็ว โดยการเขียนค่าเบี่ยงฐานให้อยู่ใน**รูปลักษณะเฉพาะ** (Characteristic Form)

รูปลักษณะเฉพาะของค่าเบี่ยงฐาน จะมีการเขียนค่าเบี่ยงฐานให้มีจำนวนหลักเท่าเลขศูนย์ของฐานหลักนั้น ๆ ดังนั้น ค่าเบี่ยงฐานที่กล่าวข้างต้นจึงกำหนด ดังนี้

ค่าเบี่ยงฐานของ 996 คือ $996-1000=-004$

แต่การหาค่า $996-1000=-004$

ด้วยวิธีลบ ไม่ใช่วิธีคิดเลขเร็ว

ให้ใช้ความรู้เรื่องการลบด้วยสูตรนิขิลัมหรือการลบด้วยทุตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้านครบสิบสิบ” เป็น

วิธีหาค่าเบี่ยงฐาน

ดังนั้น หาค่าเบี่ยงฐานของ 996 จากฐาน 1000 หาจากจำนวนเติมเต็ม 996 ของ 1000 จากสูตรนิขิลัม (ส่วนหน้า 996 คือ 9 และ 9 หาตัวเลขที่มาบวกกับจำนวนดังกล่าวแล้วได้ครบเก้า คือ 0 และ 0 ส่วนตัวเลขตัวสุดท้าย (ซึ่งมีตัวเดียว) คือ 6 หาตัวเลขที่มาบวกกับ 6 แล้วได้ครบสิบ คือ 4

ดังนั้น ค่าเบี่ยงฐานของ 9 9 6

ครบเก้า ครบเก้า ครบสิบ

คิดในใจ คือ 0 0 4 ตอบ ค่าเบี่ยงฐานของ 996 คือ –004

หรือค่าเบี่ยงฐานของ 8 7 3

ครบเก้า ครบเก้า ครบสิบ

คิดในใจ คือ 1 2 7 ตอบ ค่าเบี่ยงฐานของ 873 คือ –127

หรือค่าเบี่ยงฐานของ 9 6 8 2

ครบเก้า ครบเก้า ครบเก้า ครบสิบ

คิดในใจ คือ 0 3 2 8 ตอบ ค่าเบี่ยงฐานของ 9682 คือ –0328

ค่าเบี่ยงฐานที่กล่าวมาแล้วข้างต้นต้องมีค่าเป็นลบ

เนื่องจากเลขสองจำนวนที่นำมาคูณกันมาค่ามากกว่าฐาน ได้ ขึ้นอยู่กับว่าเลขสองจำนวนที่จะหาผลคูณนั้นมีค่าใกล้ ๆ เลขฐานหลักแบบใด ในกรณีที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ถ้าเลขสองจำนวนที่จะนำมาคูณกันนั้นมีค่ามากกว่าฐานหลักก็จะมีค่าเบี่ยงฐานเป็นบวก

เช่นถ้าหาผลคูณของ 10007×10023 ค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้งหาได้จาก $10007-10000=0007$

และ**ในทำนองเดียวกัน** ค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณหาได้จาก $10023-10000=0023$

การหาค่าเบี่ยงฐานกรณีเช่นนี้จึงไม่เป็นปัญหาในการคิดเลขเร็ว

เมื่อเข้าใจค่าเบี่ยงฐานแล้วทีนี้มาลองมาศึกษาว่าวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิต คิดลัดได้อย่าไร

จากตัวอย่างข้างต้น หาผลคูณของ 996×998 มีค่าเท่าไร

วิธีการคูณด้วยสูตรนิขิลัม ดำเนินการดังนี้

เขียนแทนด้วย ตัวตั้ง ค่าเบี่ยงฐาน $\rightarrow$ $9\ 9\ 6 \quad 0\ 0\ \bar{4}$

ตัวคูณ ค่าเบี่ยงฐาน $\rightarrow$ $9\ 9\ 8 \quad 0\ 0\ \bar{2}$ $\times$

ผลคูณ $\rightarrow$ $9\ 9\ 6+\bar{2}\ /0\ 0\ 8 = 994008$

หรือ $9\ 9\ 8+\bar{4}\ /0\ 0\ 8 = 994008$

ข้อสังเกต

ผลคูณด้วยสูตรนิขิลัม ถูก แบ่งออกเป็นสอง

- **ส่วนหน้า**ได้จาก ผลบวกไขว้ ตัวตั้งบวกกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตัวคูณ หรือ ตัวคูณบวกกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตัวตั้ง
- **ส่วนหลัง**ได้จากผลคูณค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้งและตัวคูณ (ผลคูณต้องมีจำนวนหลักเท่ากับหลักที่กำหนดไว้แต่แรกแล้ว)

เพราะฉะนั้น $996\times998=994008$

พิสูจน์เชิงเลขคณิต หาค่าเบี่ยงฐานของ $996=1000-004=1000+00\bar{4}$

และค่าเบี่ยงฐานของ $998=1000-002=1000+00\bar{2}$

แล้วแทนค่าผลคูณทั้งจำนวนให้อยู่ในรูป ผลต่างระหว่างฐานกับค่าเบี่ยงฐาน ดังนี้

$$\begin{aligned}996\times998 &= (1000+00\bar{4})\times(1000+00\bar{2}) = 1000^2+(00\bar{4})1000+(00\bar{2})1000+(00\bar{4})(00\bar{2})\\ &=(1000+(00\bar{4}))1000+(00\bar{2})1000+(00\bar{4})(00\bar{2})\\ &=(996)1000+(00\bar{2})1000+(00\bar{4})(00\bar{2}) = [996+(00\bar{2})]1000+(00\bar{4})(00\bar{2})\\ &=994\times1000+(00\bar{4})(00\bar{2})=994008\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}996\times998 &= (1000+(00\bar{2}))1000+(00\bar{4})1000+(00\bar{4})(00\bar{2})\\ &=(998)1000+(00\bar{4})1000+(00\bar{4})(00\bar{2}) = [998+(00\bar{4})]1000+(00\bar{4})(00\bar{2})\\ &=994\times1000+(00\bar{4})(00\bar{2})=994008\end{aligned}$$

หมายเหตุ การหาค่าเบี่ยงฐานด้วยวิธีการลบแบบวิธีนิขิลัม เช่นนี้จึงเรียกวิธีการคูณแบบนี้ว่า

“การคูณด้วยสูตรนิขิลัม” หรือ “การคูณด้วยค่าเบี่ยงฐาน”

หลักการ (Rule) การคูณด้วยสูตรนิขิลัม

- หาค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้งและตัวคูณกับฐานหลักที่มีค่าใกล้เคียงที่สุด
- เขียนตัวตั้งอยู่ข้างบนตัวคูณ
- เขียนค่าเบี่ยงฐานให้มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนเลขศูนย์ของฐานหลัก ไว้ถัดไปทางขวาของตัวตั้งและตัวคูณ
- ผลลัพธ์การคำนวณจะมีสองส่วน คือ

  - ผลลัพธ์ส่วนทางซ้ายจะได้จากการบวกไขว้ของตัวตั้งกับค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณหรือ จากการบวกไขว้ของตัวคูณกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง (ในแนวเส้นทแยงมุม)
  - ผลลัพธ์ส่วนทางขวาได้จากผลคูณของค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้งกับตัวคูณ
- นำผลลัพธ์ทั้งสองมาเชื่อมกัน (conjugate) เป็นคำตอบสุทธิ

ข้อสังเกตการคูณคูณด้วยสูตรนิขิลัม เป็นดังนี้

การคูณด้วยสูตรนิขิลัมเป็นวิธีการหาผลการคูณรูปแบบเฉพาะ เหมาะกับการคูณเลขสองจำนวนที่มีค่าใกล้ฐานหลัก ดังนั้น การคูณด้วยสูตรนิขิลัม จึงเป็นไปได้ 3 กรณีด้วยกันคือ

- **กรณีสองจำนวนมีค่าน้อยกว่าฐาน (Numbers Just Below a Base)**
- **กรณีสองจำนวนมีค่ามากกว่าฐาน (Numbers Above a Base) และ**
- **กรณีจำนวนหนึ่งมากกว่าฐานและอีกจำนวนหนึ่งน้อยกว่าฐาน**

ตัวอย่างแสดงการคูณด้วยสูตรนิขิลัม ตามขนาดของฐานหลัก

4.4.1 กรณีฐานสิบ

เพื่อให้ความเข้าว่า “การคูณด้วยสูตรนิขิลัมเป็นการคูณแบบเฉพาะตัวตั้งและตัวคูณจะต้องมีค่าใกล้ฐานหลัก” ดังนั้นตัวอย่างที่ง่ายที่สุด ที่นำมาแสดงเป็นจำนวนที่มีค่าใกล้ฐาน 10

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 9 ด้วย 7 ที่มีค่าน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ ขั้นตอนการคิดตามหลักการข้างต้น เป็นดังนี้

1. พิจารณาเลขสองจำนวนที่นำมาคูณกันมีค่าใกล้เคียงฐาน 10

   เนื่องจากเลขสองจำนวนเป็นตัวหลักเดียว การหาค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง 9 คือหาครบสิบของ 9 คือ 1 แต่น้อยกว่าฐาน 10 คือ $\overline{1}$ $(9-10=-(10-9)=\overline{1})$

   และในทำนองเดียวกัน ค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ 7 ก็คือครบสิบของ 7 เช่นกัน แต่น้อยกว่า ฐาน 10 คือ $\overline{3}$ $(7-10=-(10-7)=-3=\overline{3})$

2. เขียนตัวตั้งพร้อมค่าเบี่ยงฐานของตั้วตั้งไว้บนของแถวตัวคูณพร้อมค่าเบี่ยงฐานของตั้วคูณเช่นกัน ถัดจากแถวนี้ไปข้างล่างเขียนแถวของผลลัพธ์ โดยที่แถวผลลัพธ์ให้ ขีดเส้นคั่นตรงกลางเพื่อแบ่งผลลัพธ์ออกเป็นสองส่วน ดังนี้

$$\begin{array}{cc} 9 & \bar{1} \\ \underline{7} & \underline{\bar{3}} \\ & / \end{array} \times$$

3. หาผลบวกไขว้ของตัวตั้งกับค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณหรือหาผลบวกไขว้ของตัวคูณกับค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง ในที่นี้คือ $9+\bar{3}=6$ หรือ $7+\bar{1}=6$ ผลบวกที่ได้ใส่ไว้ทางซ้ายของช่องคำตอบ

$$\begin{array}{cc} 9 & \bar{1} \\ \underline{7} & \underline{\bar{3}} \\ 6 & / \end{array} \times \qquad \text{หรือ} \qquad \begin{array}{cc} 9 & \bar{1} \\ \underline{7} & \underline{\bar{3}} \\ 6 & / \end{array} \times$$

4. หาผลคูณของค่าเบี่ยงฐานทั้งสองนั้นในที่นี้คือ $\bar{1}\times\bar{3}=3$ ผลคูณที่ได้ใส่ทางขวาของช่องคำตอบ

$$\begin{array}{ccc} 9 & & \bar{1} \\ \underline{7} & & \underline{\bar{3}} \\ 6 & / & 3 \end{array} \times$$

6. ขั้นสุดท้ายหาผลบวกของผลลัพธ์ทั้งสองส่วน โดยส่วนทางซ้ายต้องคูณด้วยเลขฐานเสียก่อน ดังนี้

$6/3 = 63$ หรือ $= 6\times10+3=63$

7. **การตรวจสอบยันตวามถูกต้อง** ในกรณีการคูณด้วยสูตรนิขิลัม เป็นการคูณรูปแบบเฉพาะของเลขสองจำนวนที่มีค่าใกล้ ๆ ฐานหลัก การตรวจสอบคำตอบด้วยวิธียันความถูกต้องวิธีที่เหมาะสมที่สุดคือ **การคัดออกเก้า**

$$\begin{array}{ccc} 9 & & \bar{1} \\ \underline{7} & & \underline{\bar{3}} \\ 6 & / & 3 \end{array} \times \; = 63 \to 9 \qquad\qquad \to \begin{array}{c} 0 \\ \underline{7} \\ 0 \end{array} \times \to 9$$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ 12 ด้วย 14 ที่มีค่ามากกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 12 และ 14 เท่ากับ 2 และ 4 ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 2 \\ \underline{14} & & \underline{4} \\ 16 & / & 8 \end{array} \times \; = 168 \to 6 \qquad\qquad \begin{array}{c} 3 \\ \underline{5} \\ 15 \end{array} \times \to 6$$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 12 ด้วย 7 ที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 12 และ 7 เท่ากับ 2 และ $\bar{3}$ ตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{array}{ll} 12 & 2 \\ \underline{7} & \underline{\bar{3}} \\ \underline{\underline{9 \ /}} & \underline{\underline{\bar{6}}} \end{array} \times \quad = 9\bar{6} = 84 \to 3$$

ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{l} 3 \\ \underline{7} \\ \underline{\underline{21}} \end{array} \times \quad \to 3$$

4.4.2 กรณีฐานร้อย

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณ 92 และ 89

วิธีทำ ขั้นตอนการคิดเป็นดังนี้ ในทำนองเดียวกับกรณีฐานร้อย กล่าวคือต้องพิจารณาจำนวนที่จะนำมาคูณกันมีค่าใกล้ฐานอะไร ในที่นี้คือฐาน 100

1. หาค่าเบี่ยงฐานด้วยสูตรนิขิลัม

หาค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง 92 หาจาก ครบเก้าของ 9 คือ 0 และตัวสุดท้ายหาครบสิบของ 2 คือ 8 ดังนั้นค่าเบี่ยงที่น้อยกว่าฐาน คือ $-08 = \overline{08}$ $(92-100=-(100-92)=-08=0\bar{8})$

และค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณ 89 หาจาก ครบเก้าของ 8 คือ 1 และตัวสุดท้ายหาครบสิบของ 9 คือ 1 ดังนั้นค่าเบี่ยงที่น้อยกว่าฐาน คือ $-11 = \overline{11}$

$$\begin{array}{ll} 9\ 2 & 0\bar{8} \\ \underline{8\ 9} & \underline{\overline{11}} \\ \underline{\underline{\quad /}} & \underline{\underline{\quad}} \end{array} \times$$

2. หาผลบวกไขว้ของตัวตั้งกับค่าเบี่ยงฐานของตัวคูณหรือหาผลบวกไขว้ของตัวคูณค่าเบี่ยงฐานของตัวตั้ง คือ $92+\overline{11}=81$ หรือ $89+\bar{8}=81$

$$\begin{array}{ll} 9\ 2 & 0\bar{8} \\ \underline{8\ 9} & \underline{\overline{11}} \\ \underline{\underline{8\ 1\ /}} & \underline{\underline{\quad}} \end{array} \times$$

3. หาผลคูณค่าเบี่ยงฐานทั้งสองนั้น คือ $\bar{8}\times\overline{11}=88$

$$\begin{array}{ll} 9\ 2 & 0\bar{8} \\ \underline{8\ 9} & \underline{\overline{11}} \\ \underline{\underline{8\ 1\ /}} & \underline{\underline{88}} \end{array} \times \quad = 8188$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่าย $\overset{-08}{92}\times\overset{-11}{89}=81/88=8188$

การตรวจสอบยันตวามถูกต้อง $2\times 8=7$

$$16=7$$

$$7=7$$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณ 107 และ 114

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 107 และ 114 เท่ากับ 07 และ 14 ตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{array}{ll} 107 & 07 \\ \underline{114} & \underline{14} \\ \underline{\underline{121}} & \underline{\underline{/\ 98}} \end{array} \times \quad = 12198 \rightarrow 3$$

ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{l} 8 \\ \underline{6} \\ \underline{\underline{48}} \end{array} \times \quad \rightarrow 3$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{07}{107}\times\overset{14}{114}=121/98=12198$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 132 ด้วย 98 ที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 132 และ 98 เท่ากับ 32 และ $\overline{02}$ ตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{array}{ll} 132 & 32 \\ \underline{98} & \underline{\overline{02}} \\ \underline{\underline{130}} & \underline{\underline{/\ \overline{6}\,\overline{4}}} \end{array} \times \quad = 130\overline{64} = 12936 \rightarrow 3$$

ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{l} 6 \\ \underline{8} \\ \underline{\underline{48}} \end{array} \times \quad \rightarrow 3$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{32}{132}\times\overset{\overline{02}}{98}=130/\overline{64}\ =12936$

ตัวอย่างที่ 4 หาผลคูณของ 149 ด้วย 96 ที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 149 และ 96 เท่ากับ 49 และ $\overline{04}$ ตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{array}{ll} 149 & 49 \\ \underline{96} & \underline{\overline{04}} \\ \underline{\underline{14\underset{1}{5}}} & \underline{\underline{/\ \overline{9}\,\overline{6}}} \end{array} \times \quad = 144\overline{96} = 14304 \rightarrow 3$$

ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{l} 5 \\ \underline{6} \\ \underline{\underline{30}} \end{array} \times \quad \rightarrow 3$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{49}{149}\times\overset{\overline{04}}{96}=14\underset{1}{5}/\overline{96}=144\overline{96}=14304\ =12936$

4.4.3 กรณีฐานพัน

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 988 ด้วย 997 ที่มีค่าน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 988 และ 997 เท่ากับ $\overline{012}$ และ $\overline{003}$ ตามลำดับ

โดยใช้วิธีหาจำนวนเติมเต็มด้วยสูตรนิขิลัม

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{ll} 988 & \bar{0}\bar{1}\bar{2} \\ \underline{997} & \underline{\bar{0}\bar{0}\bar{3}} \\ 985\ / & 036 \end{array} \times \quad = 985036 \rightarrow 4 \qquad \begin{array}{l} 7 \\ \underline{7} \\ 49 \end{array} \times \rightarrow 4$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{\overline{012}}{988} \times \overset{\overline{003}}{997} = 985036$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณ 1217 และ 1014

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 1217 และ 1014 เท่ากับ 217 และ 014 ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{ll} 1217 & 217 \\ \underline{1014} & \underline{014} \\ 123\underset{3}{1} & /038 \end{array} \times \quad = 1234038 \rightarrow 3 \qquad \begin{array}{l} 2 \\ \underline{6} \\ 12 \end{array} \times \rightarrow 3$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{217}{1217} \times \overset{014}{1014} = 123\underset{3}{1}/038 = 1234038$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 1325 ด้วย 988 ที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 1325 และ 988 เท่ากับ 325 และ $\overline{012}$ ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{ll} 1325 & 325 \\ \underline{988} & \underline{\bar{0}\bar{1}\bar{2}} \\ 131\underset{3}{3} & /\ \bar{9}\bar{0}\bar{0} \end{array} \times \quad = 1310\overline{900} = 1309100 \rightarrow 5 \qquad \begin{array}{l} 2 \\ \underline{7} \\ 14 \end{array} \times \rightarrow 5$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{325}{1325} \times \overset{\overline{012}}{988} = 131\underset{3}{3}/\overline{900} = 1310\overline{900} = 1309100$

ตัวอย่างที่ 4 หาผลคูณของ 568×998

วิธีทำ พิจารณา 568 และ 998 มีค่าใกล้เคียง 1000

หาค่าเบี่ยงฐานของ 568 และ 998 เท่ากับ $\overline{432}$ และ $\overline{002}$ ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{lll} 568 & \overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2} & \\ & & \times \\ \underline{998} & \underline{\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{2}} & \\ \underline{\underline{566 \;/\; 864}} & = 566864 & \rightarrow 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1 & \\ & \times \\ \underline{8} & \\ \underline{\underline{8}} & \rightarrow 8 \end{array}$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{\overline{432}}{568} \times \overset{\overline{002}}{998} = 566864$

4.4.4 กรณีฐานหมื่น

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 9887 ด้วย 9997 ที่มีค่าน้อยกว่าฐานหนึ่งหมื่น

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 9887 และ 9997 เท่ากับ $\overline{0113}$ และ $\overline{0003}$ ตามลำดับ

โดยใช้วิธีหาจำนวนเติมเต็มด้วยสูตรนิขิลัม

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{lll} 9887 & \overline{0}\,\overline{1}\,\overline{1}\,\overline{3} & \\ & & \times \\ \underline{9997} & \underline{\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{3}} & \\ \underline{\underline{9884 \;/\; 0339}} & = 98840339 & \rightarrow 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 5 & \\ & \times \\ \underline{7} & \\ \underline{\underline{35}} & \rightarrow 8 \end{array}$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{\overline{0113}}{9887} \times \overset{\overline{0003}}{9997} = 98840339$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณ 12197 และ 10012

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 12197 และ 10012 เท่ากับ 2197 และ 0012 ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$\begin{array}{lll} 12197 & 2197 & \\ & & \times \\ \underline{10012} & \underline{0012} & \\ \underline{\underline{1220\underset{2}{9} \;/\; 6364}} & = 122116364 & \rightarrow 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 2 & \\ & \times \\ \underline{4} & \\ \underline{\underline{8}} & \rightarrow 8 \end{array}$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{2197}{12197} \times \overset{0012}{10012} = 1220\underset{2}{9}/6364 = 122116364$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ 13258 ด้วย 9889 ที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าฐาน

วิธีทำ หาค่าเบี่ยงฐานของ 13258 และ 9889 เท่ากับ 3258 และ $\overline{0111}$ ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$
\begin{array}{llcl}
13258 & 3258 & & 1 \\
 & & \times & \times \\
9889 & \bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{1} & & \underline{7} \\
\hline
131\underset{\bar{3}}{4}\underset{\bar{6}}{7} & / \ \bar{1}\bar{6}\bar{3}\bar{8} & = 13111\,\bar{1}\bar{6}\bar{3}\bar{8} = 131108362 \rightarrow 7 & \underline{\underline{7}} \rightarrow 7
\end{array}
$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{3147}{13147} \times \overset{\overline{0111}}{9889} = 131\underset{\bar{3}}{4}\underset{\bar{6}}{7} / \bar{1}\bar{6}\bar{3}\bar{8} = 13111\,\bar{1}\bar{6}\bar{3}\bar{8} = 131108362$

4.4.5 กรณีฐานมากกว่าหมื่น

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ 58776×99996

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า 58776 และ 99996 มีค่าใกล้ฐาน 1,000,000

หาค่าเบี่ยงฐานของ 58776 และ 99996 เท่ากับ $\overline{41224}$ และ $\overline{00004}$ ตามลำดับ

โดยใช้วิธีหาจำนวนเติมเต็มด้วยสูตรนิขิลัม

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$
\begin{array}{llcl}
58776 & \bar{4}\bar{1}\bar{2}\bar{2}\bar{4} & & 6 \\
 & & \times & \times \\
99996 & \bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{4} & & \underline{6} \\
\hline
5877\underset{1}{2} & / \ 64896 & = 5877364896 \rightarrow 9 & \underline{\underline{36}} \rightarrow 9
\end{array}
$$

หรือ เขียนในรูปอย่างง่ายเพื่อการคิดเลขในใจ $\overset{\overline{41224}}{58676} \times \overset{\overline{00004}}{9997} = 5877364896$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ $99995870976 \times 99999999989$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า 99995870976 และ 99999999989 มีค่าใกล้ฐาน 10^{11}

หาค่าเบี่ยงฐานโดยใช้วิธีหาจำนวนเติมเต็มด้วยสูตรนิขิลัม

ของ 99995870976 คือ $\overline{00004129024}$ และ 99999999989 คือ $\overline{00000000011}$ ตามลำดับ

ดังนั้น ยันความถูกต้อง (คัดออกเก้า)

$$
\begin{array}{llcl}
99995870976 & 0000\bar{4}\bar{1}\bar{9}\bar{2}\bar{0}\bar{2}\bar{4} & & 6 \\
 & & \times & \times \\
99999999989 & \bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{1} & & \underline{8} \\
\hline
99995870965 & / \ 00046112264 & = 9999587065000461122264 \rightarrow 3 & \underline{\underline{48}} \rightarrow 3
\end{array}
$$

สูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ

ในเวทคณิตเป็นสูตรนิขิลัม นวตัศจรมัม ทศตหะ

(Sūtra 2. nikhilaṃ navataścaramaṃ daśataḥ = सूत्र २.निखिलं नवतश्चरमं दशतः)

Nikhilam Navataścaramam Daśataḥ = All from 9 and the Last from 10

Nikhilam = นิขิล. ค. อขิล สกล สิ้นเชิง ทั้งสิ้น สมบูรณ์ (All, complete, whole, entire, full)

Navatah = นวนฺ น. เก้า (Nine)

Carama = จฺรม ค. ปัจฉิม อันเป็นที่สุด สุดท้าย ที่สุด (the last, final, end, outermost) และ

Daśataḥ = ทศนฺ ค. สิบ (Ten)

สูตรที่ 10 ยาวทูนัมหรือ ว่าด้วยค่าเบี่ยงฐาน

(Sūtra 10. YāvadūnamYāvadūnam = सूत्र १०. यावदूनम्)

Yāvadūnam mean By the deficiency

Yāvad = ยาวตฺ ว. มากเท่า, นานหรือยาวเท่า, ไกลเท่า, กี่มากน้อย

(as large as, as much as, as many, as frequent, as long as, as old as) และ

ūnam = อูน ค. น้อยกว่า, เล็กกว่า (less)

แบบฝึกหัดชุดที่ 6 การคูณสองจำนวนมีค่าน้อยกว่าฐาน

1. $97 \times 98 = $	2. $78 \times 93 = $	3. $93 \times 82 = $	4. $97 \times 73 = $
5. $997 \times 998 = $	6. $937 \times 996 = $	7. $897 \times 991 = $	8. $883 \times 989 = $
9. $836 \times 927 = $	10. $797 \times 990 = $	11. $698 \times 995 = $	12. $567 \times 997 = $

13. 8363×9989

14. 8987×9889

15. 9745×9899

16. 9963×9099

17. 9867×9899

18. 87798×99986

19. 99898×99997

20. 99898×99908

แบบฝึกหัดชุดที่ 7 การคูณสองจำนวนมีค่ามากกว่าฐาน

1. 12×13

2. 17×16

3. 15×12

4. 109×107

5. 108×111

6. 147×109

7. 112×113

8. 123×129

9. 1063×1009

10. 1597×1089

11. 1089×1257

12. 1103×1164

13. 1363×1123

14. 1439×1012

15. 1745×1111

16. 1963×1989

17. 11018×11126

18. 11198×11286

19. 19198×19993

20. 10898×10908

แบบฝึกหัดชุดที่ 8 การคูณจำนวนหนึ่งมีค่ามากกว่าฐานอีกจำนวนหนึ่งมีค่าน้อยกว่าฐาน

1. 12 9	2. 17 8	3. 19 7	4. 126 97
5. 98 108	6. 141 96	7. 162 89	8. 123 129
9. 1224 994	10. 1197 997	11. 1089 899	12. 997 1114
13. 993 1003	14. 939 1102	15. 1745 911	16. 963 1989
17. 11018 9126	18. 11198 9986	19. 19898 9993	20. 9898 10908

4.4.6 กรณีการคูณสามจำนวน

ตัวอย่างที่ 1 หาผลคูณของ $98\times97\times96$

$$\begin{array}{lll} \textbf{วิธีทำ} & 98 & \overline{02} \\ & & \quad\times \\ & 97 & \overline{03} \\ & & \quad\times \\ & \underline{96} & \underline{\overline{04}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{91/26/\bar{2}\bar{4}}} = 9126\bar{2}\bar{4} = 912576$$

พิจารณาตัวอย่างนี้พบว่าทั้งสามจำนวนมีค่าใกล้ฐาน 100 และมีค่าต่างฐานคือ $\overline{02}, \overline{03}, \overline{04}$

คำตอบมี 3 **ส่วน** คั่นด้วย เครื่องหมาย (/)

ขั้นที่ 1 นำจำนวนหนึ่งในสามจำนวนที่จะหาผลคูณไปบวกกับค่าเบี่ยงฐานของอีกสองจำนวนเหลือดังนี้

$98+(\overline{03})+(\overline{04})=91$

หรือ $97+(\overline{02})+(\overline{04})=91$

หรือ $96+(\overline{02})+(\overline{03})=91$ ซึ่งเป็นคำตอบส่วนแรก

ขั้นที่ 2 หาผลบวกของผลคูณแต่ละคู่ของค่าเบี่ยงฐานในเชิงการจัดหมู่ (combinatorics) คือ

$(\overline{02}\times\overline{03})+(\overline{02}\times\overline{04})+(\overline{03}\times\overline{04}) = 6+8+12 = 26$

ขั้นที่ 3 หาผลคูณทั้งสามของค่าเบี่ยงฐาน $(\bar{2})\times(\bar{3})\times(\bar{4}) = \overline{24}$

เพราะฉะนั้น $98\times97\times96 = 9126\bar{2}\bar{4} = 912576$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลคูณของ $1022\times1002\times1011$

$$\begin{array}{lll} \textbf{วิธีทำ} & 1022 & 022 \\ & & \quad\times \\ & 1002 & 002 \\ & & \quad\times \\ & \underline{1011} & \underline{011} \end{array}$$

$\underline{\underline{1035/308/484}} = 1035308484$ ดังนั้น $1022\times1002\times1011 = 1035308484$

พิจารณา จากทางซ้าย

ส่วนที่ 1 $1022+002+011=1035$ หรือ $1002+022+011=1035$ หรือ $1011+002+022=1035$

ส่วนที่ 2 ผลบวกของผลคูณค่าเบี่ยงฐานเชิงการจัดหมู่ $(022\times002)+(022\times011)+(002\times011)=308$

ส่วนที่ 3 ผลคูณคูณค่าเบี่ยงฐานของทั้ง 3 จำนวน $22\times2\times11=484$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลคูณของ $1012\times989\times1009$

วิธีทำ

$$\begin{array}{ll} 1012 & 012 \\ 0989 & \overline{011} \\ \underline{1009} & \underline{009} \end{array} \times \times$$

$$\underline{\underline{1010/\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}/\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{8}\,\bar{8}}} = 1010\,\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{4}\,\bar{1}\,\bar{8}\,\bar{8} = 100987512$$

พิจารณา จากทางซ้าย

ส่วนที่ 1 $1012+(\overline{011})+009=1010$ หรือ $0989+(012)+009=1010$

หรือ $1009+(\overline{011})+012=1010$

ส่วนที่ 2 ผลคูณค่าเบี่ยงฐานเชิงการจัด

$(012\times\overline{011})+(012\times009)+(\overline{011}\times009)=-123$

ส่วนที่ 3 ผลคูณค่าเบี่ยงฐานทั้ง 3 จำนวน $012\times\overline{011}\times009=-1188$

ดังนั้น $1012\times989\times1009=1009875812$

แบบฝึกหัดชุดที่ 10 การคูณสามจำนวน

1. $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ \underline{6} \end{array} \times \times$

2. $\begin{array}{r} 97 \\ 96 \\ \underline{91} \end{array} \times \times$

3. $\begin{array}{r} 88 \\ 96 \\ \underline{95} \end{array} \times \times$

4. $\begin{array}{r} 94 \\ 97 \\ \underline{81} \end{array} \times \times$

5. $\begin{array}{r} 994 \\ 997 \\ \underline{988} \end{array} \times \times$

6. $\begin{array}{r} 998 \\ 978 \\ \underline{996} \end{array} \times \times$

7. $\begin{array}{r} 1018 \\ 1018 \\ \underline{104} \end{array} \times \times$

8. $\begin{array}{r} 1141 \\ 1018 \\ \underline{101} \end{array} \times \times$

9. $\begin{array}{r} 1224 \\ 1114 \\ \underline{107} \end{array} \times \times$

10. $\begin{array}{r} 1197 \\ 1018 \\ \underline{99} \end{array} \times \times$

11. $\begin{array}{r} 1005 \\ 1131 \\ \underline{1007} \end{array} \times \times$

12. $\begin{array}{r} 1017 \\ 1104 \\ \underline{1012} \end{array} \times \times$

13. 9 9 3 1 0 1 8 × 1 1 1 5 × ______	14. 9 9 8 9 9 9 9 2 × 9 9 7 6 × ______	15. 9 9 6 9 8 7 × 1 0 0 9 × ______	16. 1 0 1 1 1 1 0 1 1 2 × 1 0 1 0 2 × ______
17. 9 9 9 1 1 9 9 9 1 4 × 9 9 9 1 5 × ______	18. 1 0 1 1 1 9 9 1 2 × 1 1 1 4 3 × ______	19. 9 9 9 1 9 9 9 2 × 1 0 1 0 2 × ______	20. 1 0 1 1 1 1 0 1 1 2 × 9 9 0 3 × ______