3. การลบ

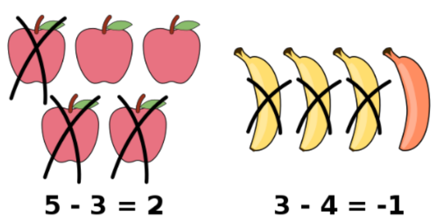
เรียบเรียง สมชาย ศรีวรางกูล

บรรณาธิการ กระจาย คงสง

ลือชัย ทิพรังศรี

บทนำ

การลบเป็นการคิดเลขที่ผกผันหรือตรงข้ามกับการบวกของวิชาเลขคณิต ใช้เครื่องหมาย (−) แทนการลบ คำว่า ‘subtraction’ ได้รากศัพท์มาจากภาษาละติน คือคำว่า ‘Subtrahere’ ซึ่งเป็คำผสมของคำว่า ‘Sub’ หมายถึง ‘under’ และ ‘trahere’ หมายถึง ‘to pull or to take away’

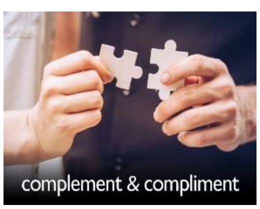


ดังนั้น ความหมายทั่วไปของการลบก็คือการนำเอาสิ่งของออกจากกลุ่ม *หรือ ความหมายอีกนัยหนึ่งแทนที่จะนำเอาจำนวนหนึ่งออกจากจำนวนหนึ่ง กลับหาวิธีการที่จะหาจำนวนหนึ่งที่นำไปบวกกับจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสองจำนวนที่กำหนดให้นั้นแล้วได้ผลบวกหรือผลรวมเป็นจำนวนหนึ่งในสองจำนวนนั้น*

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Subtraction.svg

พิจารณาจากความหมายข้างต้นของการลบ

แทนที่จะคิดการลบแบบดั้งเดิมที่ว่าการลบคือการนำเอาสิ่งของออกจากกลุ่ม ก็คิดอีกแบบหนึ่ง



เช่น กำหนดเลขสองจำนวน คือ 8 และ 10 จงหาเลขจำนวนหนึ่งที่นำมาบวกกับจำนวนหนึ่งในสองจำนวนนี้ แล้วผลบวกต้องเท่ากับอีกจำนวนหนึ่งที่กำหนดให้นั้น **วิธีคิด** ก็คงต้องหาจำนวนที่มาบวกกับจำนวนที่มีค่าน้อยคือ 8 แล้วได้ผลบวกเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากคือ 10

โดยประจักษ์ <u>ตอบ</u> 2 เพราะ $2+8=10$ นั่นคือ $10-8=2$

จากวิธีคิดเช่นนี้เป็น ‘การหาจำนวนเติมเต็ม (complement)’ คือการหาจำนวนที่มาเติม 8 ให้เต็ม 10 ก็คือ 2 นั่นเอง สองจำนวนนั้นคือตัวตั้ง (Minuend) และตัวลบ (Subtrahend) และจำนวนที่นำไปบวกนั้นคือเศษเหลือ (Remainder) ของการลบ (หรือเศษเหลือของการลบคือผลต่างระหว่างตัวตั้งกับตัวลบ) และจากความคิดข้างต้นได้กำหนดการเขียนวิธีทำการลบแบบแนวตั้งไว้ดังนี้

วิธีทำ	10	ตัวตั้ง (Minuend)
	$\underline{8}$	ตัวลบ (Subtrahend)
	$\underline{\underline{2}}$	เศษเหลือ (Remainder)

ข้อสังเกต การลบวิธีดั้งเดิมข้างต้นนั้นมีเรื่องการยืม เมื่อพิจารณาดี ๆ ทำให้ฉุดคิดขึ้นว่า จากวิธีคิดข้างต้นที่กำหนดเลขสองจำนวน คือ 8 และ 10 จงหาเลขจำนวนหนึ่งที่นำมาบวกกับจำนวนหนึ่งในสองจำนวนนี้ แล้วผลบวกต้องเท่ากับอีกจำนวนหนึ่งที่กำหนดให้นั้น ก็คือ “การหาจำนวนเติมเต็ม (complement)” หาจำนวนที่มาเติม 8 ให้เต็ม 10 ก็คือ 2 นั่นเอง

การลบ นั้นถ้าตัวเลขแต่ละหลักของตัวตั้งนั้นมากกว่าตัวเลขแต่ละหลักของตัวลบแล้วก็ง่ายดาย การลบแบบวิธีดั้งเดิมคือการนำเอาสิ่งของออกจากกลุ่มไม่มีการยืมตัวเลขถัดไปที่อยู่ข้างหน้าจึงไม่ยุ่งยาก

กำหนดให้		
	$9\,2\,7\,8\;-$	ตัวตั้ง (Minuend)
	$\underline{3\,0\,4\,1}$	ตัวลบ (Subtrahend)
	$\underline{\underline{6\,2\,3\,7}}$	เศษเหลือ (Remainder)

แต่ถ้าตัวเลขบางหลักหรือทุกตัวของตัวตั้งน้อยกว่าตัวเลขบางหลักหรือทุกตัวของตัวลบแล้วการดำเนินการลบจะเป็นเรื่องไม่ใช่ง่ายกับการคิดในแต่ละขั้นตอนนั้นเลย นี่คือปัญหาที่จะทำอย่างไรที่จะทำให้การลบนั้นเป็นเรื่องง่ายและคิดได้รวดเร็วถูกต้องมากที่สุด และนี่ก็คืองานที่เวทคณิตต้อง...

หรือเช่น กำหนดเลขสองจำนวน คือ 12 และ 7 จงหาเลขจำนวนหนึ่ง ที่นำมาบวกจำนวนหนึ่งในสองจำนวนที่กำหนดนี้ แล้วผลบวกต้องเท่ากับอีกจำนวนหนึ่ง

วิธีคิด ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว การหาจำนวนที่มาบวกกับจำนวนที่มีค่าน้อยคือ 7 แล้วได้ผลบวกเท่ากับจำนวนที่มีค่ามากคือ 12 นั้นเวลาคิดนั้นไม่ค่อยยาก ด้วยการหาจำนวนที่มาเติม 7 แล้วให้เต็มเป็น 12 โดยประจักษ์ <u>ตอบ</u> 5 เพราะ $7+5=12$ หรือนั่นก็คือ $\boxed{12-7=5}$

แต่จากความคิดข้างต้น เมื่อนำมากำหนดการเขียนวิธีทำการลบแบบแนวตั้ง ก็จะพบปัญหา เมื่อลบตรงตามตำแหน่งหรือค่าประจำตำแหน่งนั่นคือตัวตั้งและตัวลบ ณ ตำแหน่งเดียวกัน ดังนี้

วิธีทำ $\begin{array}{r} 12\,- \\ \underline{07} \\ \underline{\underline{}} \end{array}$ $\qquad\qquad$ $\begin{array}{r} 0\overset{1}{2}\,- \\ \underline{07} \\ \underline{\underline{5}} \end{array}$

นั่นคือ ณ ตำแหน่งหลักหน่วย พบว่า $2-7$ ไม่ใช่ $\boxed{12-7=5}$ แล้ว

วิธีคิดแบบดั้งเดิม ก็ต้องยืม 1 มาจากหลักข้างหน้า เนื่องจากเป็นหลักสิบค่าที่ยืมมา 1 จึงเท่ากับ 10 นำมาบวกกับ 2 ได้เป็น 12 ก็จะได้ $12-7=5$

ตัวอย่างที่ 1 แสดงการลบแบบดั้งเดิม $8436-4768$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{cccc}
7 & 13 & & \\
 & \cancel{3} & 12 & \\
 & & \cancel{2} & 16 \\
\cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{6} \\
4 & 7 & 6 & 8 \\
\hline
3 & 6 & 6 & 8 \\
\hline\hline
\end{array}
\;-
$$

หลักพัน ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ $7-4=3$

หลักร้อยถูกยืมไป 1 เหลือ 3 ในทำนองเดียวกัน $13-7=6$

หลักสิบถูกยืมไป 1 เหลือ 2 ในทำนองเดียวกัน $12-6=6$

$6-8$ ต้องยืมหลักข้างมา 10 บวก 6 เป็น 16 แล้ว $16-8=8$

จากตัวอย่างนี้ลักษณะทั่วไปของการดำเนินทำซ้ำ ๆ เหมือนกัน คือมีการยืมจากตัวเลขถัดไปข้างหน้าคือหลักที่มีค่ามากกว่า ทำให้การคิดเลขยุ่งยาก และเสียเวลามาก

การดำเนินการลบข้างต้นสามารถทำให้ง่ายด้วยวิธีเทคนิค

ในเวทคณิตการลบกล่าวไว้ในสูตรที่ 2 ของในทั้งหมด 16 สูตรคือสูตรนิขิลัม นวตัสจรมัม ทศตหะ (Nikhilam Navathaścaramam Dhaśataḥ = All, complete, whole, entire, full) เรียกสั้น ๆ ว่า**สูตรนิขิลัม** เป็นสูตรที่ใช้มากที่สุดในการคำนวณ

ความหมายของสูตรนี้ คือ **"ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ"** ซึ่งสอดคล้องกับ **เรื่องการบวก** ที่มีความรู้พื้นฐานเรื่องเลขสองจำนวนบวกกัน**ครบสิบ** และเรื่อง**การยันความถูกต้อง** ด้วยวิธีการคัดออกเก้าที่มีความรู้พื้นฐานเรื่องเลขสองจำนวนบวกกัน**ครบเก้า** นำสองเรื่องนี้มาควบรวม (merger) ใช้กับการลบสำหรับวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิต อันเป็น**การลบที่เปลี่ยนการลบเป็นการบวก** และยิ่งไปกว่านี้ยังเป็น**การลบที่แยกหลักแต่ละหลัก**โดยที่ไม่มีการยืมในกรณีที่ตัวเลขของตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวเลขของตัวลบ ณ หลักเดียวกัน นี่คือความความหลากหลาย รูปแบบการคิด และอินโฟกราฟิก (Diversity, Thinking Styles, and Infographics) ที่ทำให้ได้มีทางเลือกสำหรับการคิดเลข เพิ่มจากวิธีดั้งเดิมที่มีอยู่

หลักการของวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตเป็นดังนี้

- จำนวนทั้งสองที่เป็นตัวตั้งและตัวลบถูกแยกออกตามค่าประจำตำแหน่ง (หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย...) สอดคล้องเหมือนวิธีดั้งเดิม จึงไม่ขัดแย้ง
- เปลี่ยนการลบให้เป็นการบวกของตัวตั้งและตัวลบ เป็นการบวกตัวตั้งกับจำนวนเติมเต็ม หรือเป็นการบวกบวกด้วยจำนวนวินคิวลัม เป็นต้น
- ทำการลบแบบตัวเลขต่อหลักโดยไม่ต้องยืมมาจากหลักข้างหน้า

นี่คือ ความคิดของเวทคณิตที่พยายามเปลี่ยนการลบเป็นการบวก ซึ่งจะได้ศึกษาวิธีการลบแบบเวทคณิตดังต่อไป

การลบด้วยวิธีการแยกหลักนี้มี 3 วิธี ด้วยกันคือ

- **การลบด้วยสูตรนิขิลัมหรือการลบด้วยสูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ** หรือในเวทคณิตใช้สูตรนิขิลัม นวตัสจรมัม ทศตหะ เรียกสั้น ๆ ว่า**สูตรนิขิลัม** (Nikhilam Navathaścaramam Dhaśataḥ)
- **การลบด้วยวิธีวินคิวลัม** (Vinculum Method)
- **การลบด้วยวิธีครบสิบ** หรือในเวทคณิตคือการลบด้วย**สูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ** (Ekādhikena Pūrveṇa) เป็นการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของตัวลบ

3.1 จำนวนเติมเต็ม (Complement Number)

ก่อนที่จะศึกษาการลบแบบเวทคณิต ในเวทคณิตได้ใช้สูตรที่ 2 นิขิลัม นวตัสจรมัม ทศตหะ เรียกสั้น ๆ ว่าสูตรนิขิลัม (Sūtra 2. Nikhilaṃ navataścaramaṃ daśataḥ = सूत्र २.निखिलं नवतश्चरमं दशत:)

สูตรนี้มีความพิเศษที่แทนที่จะใช้วิธีการลบแบบดั้งเดิมกลับใช้วิธีการบวก

เมื่อสูตรนี้ใช้วิธีการบวกแทนการลบได้ การลบก็ไม่ต้องมีการยืมเลขจากหลักที่มีค่ามากกว่าที่อยู่ถัดไปข้างหน้าสำหรับการลบของวิธีดั้งเดิมนั้นต้องมีการยืม จึงทำให้เกิดการลบนั้นต้องใช้เวลา (ช้า) น่าเบื่อหน่ายและความผิดพลาดสูง ยิ่งในกรณีที่ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบแล้วจะทำให้หลายคนไม่ชอบเรียนเลขคณิตต่อไปเลย นี่คือปัญหาที่พบกับการลบของวิธีดั้งเดิม

สูตรนิขิลัม นั้นในเวทคณิตกล่าวถึงความคิดพื้นฐานมาจากการใช้ชีวิตประจำวันของคนเรา คือการจับจ่ายใช้สอย

<u>สมมุติ</u> เราซื้อของจากแม่ค้าด้วยราคา 487 บาท แล้วจ่ายด้วยธนบัตร 1,000 บาท แม่ค้าจะทองเงินเราเท่าไร ?

เมื่อสังเกต การทอนเงินของแม่ค้า อาจจะมีกรณีที่แม่ค้ามักจะทอนเงินให้เรา 500 บาท ก่อนแล้วแม่ค้าก็คิดหาเงินที่มารวมกับเงิน 87 บาท เพื่อให้ครบ 100 บาท ก็คือ 13 บาท

นั่นคือ แทนที่แม่ค้าจะใช้การลบแต่กลับใช้วิธีคิดตรงข้ามคือหาจำนวนเงินที่มารวมหรือมาบวกกับ 87 บาท ให้ได้เงินครบ 100 บาท ก็คือ 13 บาท นั่นเอง เรียกจำนวน 13 นี้ว่าเป็น**จำนวนเติมเต็ม** 100 ของจำนวน 87

จำนวนเติมเต็ม (Complements) เป็นความคิดริเริ่มในการคำนวณ

วิธีคิด การหาจำนวนเติมเต็มที่รวดเร็วจะทำอย่างไร

เวทคณิตกล่าวถึงสูตรตรนิขิลัม หรือ “ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ”

ดังนั้น วิธีหาจำนวนเติมเต็ม 100 ของ 87 **หาได้ดังนี้** 87 ถูกแบ่งตัวเลขโดดเป็น 2 ส่วนคือตัวเลขโดดส่วนหน้าและตัวเลขโดดส่วนหลังเพียงตัวเดียว 87 ตัวเลขส่วนหน้าคือ 8 หาตัวเลขที่มาบวกกับ 8 แล้วได้ครบเก้าคือ 1 และตัวเลขตัวสุดท้าย 7 หาตัวเลขที่มาบวกกับ 7 แล้วครบสิบคือ

3 นั่นเอง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ ตัวเติมเต็มเก้าของ 8 คือตัวเลขที่บวกกับ 8 แล้ว**ครบเก้า (หรือทบเก้า)** ก็คือ 1 ตัวเติมเต็มสิบของ 7 คือตัวเลขที่บวกกับ 7 แล้ว**ครบสิบ (หรือทบสิบ)** ก็คือ 3 ซึ่งเป็นตัวสุดท้ายของ 87

สรุปได้ว่า 13 **เป็นจำนวนเติมเต็ม** 100 **ของจำนวน** 87

ทีนี้ถ้าเราตั้งคำถามว่า ถ้าเราซื้อของด้วยราคา 487 บาท จ่ายเงินไป 1000 บาท จะได้เงินทอนเท่าไร?

วิธีคิด โดยใช้ "สูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม" ดำเนินการดังนี้

จากจำนวน 487 ถูกแยกเป็นสองส่วน คือ

48	7
ส่วนหน้าทุกตัว	ส่วนท้ายสุดมีเพียงตัวเดียว

- ตัวเลขส่วนหน้าทุก ๆ ตัวของ 487 คือ 4 และ 8 ให้หาตัวเลขที่มาบวกกับ 4 และ 8 แล้วได้ 9 เรียกตัวเลขที่มาบวกกับ 4 และ 8 แล้วได้ 9 ว่า **ตัวเติมเต็ม** 9 ของ 4 และ 8 คือ 5 และ 1 ตามลำดับ ซึ่งเป็นการใช้วิธีคิด **"ทุกตัวครบเก้า"**
- ตัวเลขส่วนท้ายสุดของ 487 คือ 7 ให้หาตัวเลขที่มาบวกกับ 7 แล้วได้ 10 เรียกตัวเลขที่มาบวกกับ 7 แล้วได้ 10 ว่า**ตัวเติมเต็ม** 10 ของ 7 คือ 3 ซึ่งเป็นการใช้วิธีคิด **"ตัวสุดท้ายครบสิบ"**

ดังนั้น จำนวนเติมเต็ม 1000 ของ 487 คือ 513

สรุป คิดจากซ้ายไปขวาหรือขวาไปซ้ายก็ได้ ซึ่งจะต้องได้เงินทอน 513 บาท

แสดงวิธีคิดเชิงเลขคณิตได้ดังนี้

$1000 \rightarrow$ 9 9 10 จะเห็นได้ว่า 1000 เขียนแทนด้วย 9 9 10

5 1 3 ด้วยการเปลี่ยนค่าประจำตำแหน่ง (หลักหน่วย, หลักสิบ,

$\underline{487} \rightarrow$ $\underline{4\ 8\ 7}$ หลักร้อย) จึงหาตัวเติมเต็ม 9 ทุก ๆ ตัว

จำนวนเติมเต็ม1000 ของ 487 — 5 1 3 แต่ตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็ม 10

คิดในใจ 1000 − 4 8 7

ครบเก้า ครบเก้า ครบสิบ

= 5 1 3

ข้อสังเกต สูตรนิขิลัม นั้นเบื้องต้นนำไปใช้ในการลบเลข กรณีที่ตัวตั้งอยู่ในรูปจำนวนสิบกำลังเอ็น (10^n) ได้แก่ 100,1000,10000,... เป็นต้น

หมายเหตุ 1. วิธีหาเลขสองจำนวนบวกกันได้สิบ (10) เรียกว่าครบสิบหรือทบสิบ และวิธีหาเลขสองจำนวนบวกกันได้เก้า (9) เรียกว่าครบเก้า หรือ ทบเก้า

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a+b=10$ แล้ว เรียก a เป็นตัวเติมเต็ม 10 ของ b

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a+b=9$ แล้ว เรียก a เป็นตัวเติมเต็ม 9 ของ b

บทนิยาม 1 ครบเก้าหรือทบเก้า คือ การหาจำนวนเต็มบวก 2 จำนวนที่บวกกันได้เท่ากับ 9

ถ้าให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ใด ๆ แล้ว $a+b=b+a=9$ เรียก a และ b เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน ซึ่งผลบวกตัวเลขสองจำนวนบวกกันได้เก้า ตั้งแต่ 0 ถึง 9 มีดังนี้

0 และ 9 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $0+9=9+0=9$

1 และ 8 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $1+8=8+1=9$

2 และ 7 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $2+7=7+2=9$

3 และ 6 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $3+6=6+3=9$

4 และ 5 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $4+5=5+4=9$

บทนิยาม 2 ครบสิบหรือทบสิบ คือ การหาจำนวนเต็มบวก 2 จำนวนที่บวกกันได้เท่ากับ 10

ถ้าให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว $a + b=b + a=10$

เรียก a และ b เป็นจำนวนเติมเต็มสิบซึ่งกันและกัน หรือ a และ b เป็น ตัวเติมเต็ม 10 ซึ่งกันและกัน ผลบวกสองจำนวนที่บวกกันได้สิบ ตั้งแต่ 1 ถึง 9 มีดังนี้

0 และ 10 เป็นจำนวนเติมเต็มสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $0 + 10 = 10+ 0 = 10$

1 และ 9 เป็นจำนวนเติมเต็มสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $1 + 9 = 9 + 1 = 10$

2 และ 8 เป็นจำนวนเติมเต็มสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $2 + 8 = 8 + 2 = 10$

3 และ 7 เป็นจำนวนเติมเต็มสิบซึ่งกันและกัน เพราะ $3 + 7 = 7 + 3 = 10$

4 และ 6 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $4 + 6 = 6 + 4 = 10$

5 และ 5 เป็นจำนวนเติมเต็มเก้าซึ่งกันและกัน เพราะ $5 + 5 = 10$

บทนิยาม 3 ฐานหลัก (Theoretical Base) หรือฐานสิบกำลังเอ็น คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป 10^n

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้แก่ $10^1=10,100=10^2,1000=10^3,10000=10^4,...$

บทนิยาม 4 ฐานหมุนเวียน (Working Base) คือพหุคูณของฐานหลัก หรือพหุคูณของฐานสิบกำลังเอ็น

ได้แก่ $20=2\times 10,200=2\times 10^2,2000=2\times 10^3,20000=2\times 10^4,...$

$30=3\times 10,300=3\times 10^2,3000=3\times 10^3,30000=3\times 10^4,...$

$40=4\times 10,300=4\times 10^2,4000=4\times 10^3,40000=4\times 10^4,...$ เป็นต้น

สรุป "ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม" วิธีคิดเริ่มจากตัวเลขทางซ้ายสุดทุกตัวหาตัวเลขที่นำมาบวกตัวแลขแต่ละตัวแล้วได้ครบเก้า (9) แต่ยกเว้นตัวเลขตัวท้ายสุดเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่หาตัวเลขมาบวกกับตัวเลขตัวสุดท้ายนี้ได้ครบสิบ (10)

สูตรนิขิลัมเป็นสูตรที่ใช้สำหรับหาผลต่างระหว่างตัวตั้งที่เป็นจำนวนเลขในรูปฐานหลัก (Theoretical Base) หรือฐานสิบกำลังเอ็น (power of 10) กับตัวลบ

การหาคำตอบหาโดยไม่ใช้การลบแต่ใช้การบวกแทน โดยการหาเลขโดดที่เป็นตัวเติมเต็มของเก้า (Complement) ด้วยวิธีหาผลบวกครบเก้าหรือทบเก้า ของแต่ละหลัก ส่วนเลขโดดตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบ ด้วยวิธีหาผลบวกครบสิบหรือทบสิบของตัวลบ เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1 หาจำนวนเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

64, 3883, 10905, 10213409

วิธีทำ ใช้วิธี "ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ" หาตัวเติมเต็มของจำนวนของที่กำหนดให้ โดยฐานหลักต้องมีค่ามากกว่าจำนวนที่กำหนดให้นั้นแต่ต้องใกล้เคียง

64 เป็นจำนวนที่มีค่าใกล้ฐานหลัก ฐาน 100 แยก 64 ออกเป็นสองส่วน

คือ	6	4
	ส่วนหน้าทุกตัว	ส่วนท้ายสุดมีเพียงตัวเดียว

หาตัวเติมเต็มเก้าของ 6 คือ 3 ส่วนตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 4 คือ 6

ดังนั้นตัวเติมเต็ม 100 ของ 64 คือ 36 (เพราะว่า $64+36=100$)

คิดในใจ 100	=	9	10
		6	4
		ครบเก้า	ครบสิบ
	=	3	6

ในทำนองเดียวกัน 3883 เป็นจำนวนที่มีค่าใกล้ฐานหลัก ฐาน 10000 แยก 3883 ออกเป็นสองส่วน

คือ	388	3
	ส่วนหน้าทุกตัว	ส่วนท้ายสุดมีเพียงตัวเดียว

หาตัวเติมเต็มเก้าของ 3, 8 และ 8 คือ 6, 1 และ 1 ตามลำดับ ส่วนตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 3 คือ 7

ดังนั้นตัวเติมเต็ม 10000 ของ 3883 คือ 6117 (เพราะว่า $3887+6113=10000$)

คิดในใจ 10000	=	9	9	9	10
		3	8	8	3
		ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบสิบ
	=	6	1	1	7

ในทำนองเดียวกัน 10905 เป็นจำนวนที่มีค่าใกล้ฐานหลัก ฐาน 100000 แยก 10905 ออกเป็นสองส่วน

คือ	1090	5
	ส่วนหน้าทุกตัว	ส่วนท้ายสุดมีเพียงตัวเดียว

หาตัวเติมเต็มเก้าของ 1, 0, 9, 0 และ 5 คือ 8, 9, 0 และ 9 ตามลำดับ ส่วนตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 5 คือ 5 ดังนั้นตัวเติมเต็ม 100000 ของ 10905 คือ 89095 (เพราะว่า $10905 + 89095 = 100000$)

คิดในใจ	100000	−	1	0	9	0	5
			ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบสิบ
		=	8	9	0	9	5

ในทำนองเดียวกัน 70213409 เป็นจำนวนที่มีค่าใกล้ฐานหลัก ฐาน 10^8 แยก 70213409 ออกเป็นสองส่วน

คือ	7021340	9
	ส่วนหน้าทุกตัว	ส่วนท้ายสุดมีเพียงตัวเดียว

หาตัวเติมเต็มเก้าของ 7, 0, 2, 1, 3 และ 4 คือ 2, 9, 7, 8, 6 และ 6 ตามลำดับ ส่วนตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 9 คือ ดังนั้นตัวเติมเต็ม 10^8 ของ 70213409 คือ 29787691

(เพราะว่า $70213409 + 29787691 = 100000000$)

ตัวอย่างที่ 2 หาจำนวนเติมเต็มของ 596087 เมื่อกำหนดฐานหลักคือ 100000000

วิธีทำ พิจารณา 1 0 0 0 0 0 0 0 0

เทียบหลักต่อหลักกัน

0 0 5 9 6 0 8 7

จะเห็นได้ชัดเจนเมื่อเทียบหลักต่อหลักของฐานหลักที่กำหนดให้กับจำนวนที่จะหาจำนวนเติมเต็มของมัน แล้วแต่ละตัวเลขของส่วนหน้าหาตัวเลขมาบวกแต่ละตัวให้ครบเก้าคือ 0, 0, 5, 9, 6, 0, 8 นี้ได้แก่ 9, 9, 4, 0, 3, 9, 1 และตัวสุดท้าย คือ 7 หาตัวเลขที่มาบวกกับ 7 แล้วครบสิบคือ 3 ก็จะได้จำนวนเติมเต็มของ 596087 เมื่อกำหนดฐานหลัก 100000000 คือ 99403913

คิดในใจ	100000000	−	0	0	5	9	6	0	8	7
			ครบสิบ	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบเก้า	ครบสิบ
		=	9	9	4	0	3	9	1	3

หมายเหตุ จากความรู้การหาจำนวนเติมของจำนวนที่กำหนดให้กับฐานหลักที่มีค่าใกล้เคียงกับจำนวนที่กำหนดให้นั้นก็คือการลบของจำนวนที่กำหนดให้จำนวนเติมเต็มกับฐานหลักนั้นเอง

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 หาผลต่างของ $100-76$,$1000-874$,$1000-307$,$10000-6532$,$100000-87580$

วิธีทำ จากการหาจำนวนเติมเต็มที่กล่าวข้างต้น ก็คือการหาผลต่างระหว่าง เลขฐานหลักกับจำนวนที่ต้องการหาจำนวนเติมเต็มของมัน ดังนั้นการหา $100-76$ แทนที่จะใช้วิธีการลบกลับใช้วิธีการบวกแทน ด้วยการหาจำนวนเติมเต็ม 100 ของ 76 ด้วยสูตรนิขิลัมหรือสูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบนั่นเอง

โดยการหาตัวเติมเต็มเก้าของ 7 คือ 2 และตัวสุดท้ายตัวเติมเต็มสิบของ 6 คือ 4 ให้คิดจากซ้ายไปทางขวา **ดังนั้น** จำนวนเติมเต็ม 100 ของ 76 คือ 24 แทน $100-76=24$

ในทำนองเดียวกัน

การหา $1000-874$ แทนที่จะหาผลต่างโดดการลบแต่กลับใช้การหาจำนวนเติมเต็ม 1000 ของ 874

โดยหาตัวเติมเต็มเก้าของส่วนหน้าของ 1 เป็นตัวเติมเต็มเก้าของ 8 และ 2 เป็นตัวเติมเต็มเก้าของ 7

ส่วนสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 4 คือ 6

ดังนั้น จำนวนเติมเต็ม 1000 ของ 874 คือ 126

ในทำนองเดียวกันการหา $1000-307$ หาจำนวนเติมเต็ม 1000 ของ 307 แทนกาลบ

โดยหาตัวเติมเต็มเก้าของส่วนหน้าของ 6 เป็นตัวเติมเต็มเก้าของ 3 และ 9 เป็นตัวเติมเต็มเก้าของ 0

ส่วนสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 7 คือ 3

ดังนั้น จำนวนเติมเต็ม 1000 ของ 307 คือ 693

ในทำนองเดียว $10000-6532$ หาจำนวนเติมเต็ม 10000 ของ 6532 แทนกาลบ

โดยหาตัวเติมเต็มเก้าของส่วนหน้าของ 6,5,3 คือ 3,4,6 ตามลำดับ ส่วนสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 2 คือ 8

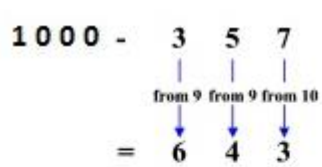
ดังนั้น $10000-6532=3468$

ในทำนองเดียว $100000-87580$ โดยการหาจำนวนเติมเต็ม 100000 ของ 87580 ในกรณีนี้ เนื่องจากส่วนหลังคือตัวสุดท้ายตัวเติมเต็ม 10 ของ 0 คือ 0 จึงจะต้องไปเริ่มคิดหาตัวเติมเต็มที่ตัวเลขถัดไปที่อยู่ข้างหน้าศูนย์นี้ คือเริ่มที่ 8,7,5, 8 ด้วยสูตร์ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหาตัวเติมเต็มเก้าของส่วนหน้าของ 8,7,5 คือ 1,2,4 ตามลำดับ ส่วนสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของ 8 คือ 2

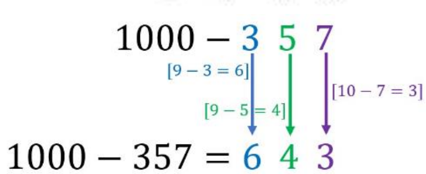
ดังนั้น $100000-87580=12420$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลต่างของ $1000-357$

วิธีทำ คิดในใจ



หรือ



หมายเหตุ 1. ในกรณี จำนวนที่ลงท้ายด้วย 0, 00, 000, 0000,... ให้คงศูนย์ไว้ แล้วให้เริ่มคิดวิธี "ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ" ทุกตัวที่อยู่หน้าศูนย์ทั้งหมด

2. สังเกตได้ว่า "วิธีการลบแบบวิธีของเวทคณิตนั้นเป็นการบวกด้วยวิธีการแยกหลัก (Digit Seperator Method) "

3. ตัวเติมเต็ม ตรงกับภาษาสันสกฤต คือ ปูรัก (Purak)

การลบด้วยสูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ

ในเวทคณิตเป็นสูตรนิขิลัม นวตัศจรมัม ทศตหะ

(Sūtra 2. nikhilaṃ navataścaramaṃ daśataḥ = सूत्र २.निखिलं नवतश्चरमं दशत:)

Nikhilam Navataścaramam Daśataḥ = All from 9 and the Last from 10

Nikhilam = นิขิล. ค. อขิล สกล สิ้นเชิง ทั้งสิ้น สมบูรณ์

(All, complete, whole, entire, full)

Navatah = นวนฺ น. เก้า (Nine)

Carama = จรม ค. ปัจฉิม อันเป็นที่สุด สุดท้าย ที่สุด (the last, final, end, outermost) และ

Daśataḥ = ทศนฺ ค. สิบ (Ten)

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. ใช้วิธี "ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ" หาจำนวนเติมเต็มของจำนวนต่อไปนี้

1) 444 ฐานหลัก 1000
2) 675 ฐานหลัก 1000
3) 2486 ฐานหลัก 10000
4) 18276 ฐานหลัก 100000
5) 8998 ฐานหลัก 100000
6) 9888 ฐานหลัก 1000000
7) 1020304 ฐานหลัก 10000000
8) 7998765 ฐานหลัก 100000000
9) 3570 ฐานหลัก 100000
10) 920 ฐานหลัก 10000
11) 1234560 ฐานหลัก 10000000000
12) 3300 ฐานหลัก 100000

2. ดำเนินการลบโดยใช้ “ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ” หาคำตอบ

1 100 − 76	2) 100 − 47	3) 1000 − 638	4) 1000 − 327
5) 1000 − 757	6) 1000 − 846	7) 1000 − 998	8) 1000 − 889
9) 10000 − 6387	10) 10000 − 3377	11) 10000 − 456	12) 10000 − 275
13) 100000 − 84576	14) 100000 − 94998	15) 100000 − 3586	16) 100000 − 7928
17) 200 − 76 = 124	18) 200 − 47	19) 3000 − 638	20) 3000 − 327
21) 4000 − 757	22) 5000 − 846	23) 2000 − 998	24) 6000 − 889
25) 70000 − 6387	26) 50000 − 3377	27) 70000 − 456	28) 93000 − 275
29) 210000 − 3586	30) 510000 − 7928	31) 510000 − 84576	32) 110000 − 94998
33) 211000 − 43586	34) 511000 − 47718	35) 615000 − 284576	36) 213500 − 94998

3.2 การลบด้วยสูตรนิขิลัมหรือการลบด้วยสูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ

เนื่องจากวิธีเวทคณิตสำหรับการลบ (Vedic Method for Subtraction) เป็นการลบด้วยวิธีแยกจำนวนออกเป็นส่วน ๆ (Decomposition Method) โดยตัวตั้งและตัวลบถูกแยกออกเป็นจำนวนย่อย ๆ ตามค่าประจำหลัก (หลักหน่วย หลักสิบ หลักร้อย ...) ดังที่จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ จะทำให้การคิดลบเลขสองจำนวนง่ายขึ้น

ตัวอย่างที่ 1 หาผลลบ 365 จาก 632

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 632 &= 600 + 30 + 2 &&= 500 + 120 + 12 \\ -365 &= -(300 + 60 + 5) &&= \underline{-(300 + 60 + 5)} \\ & &&= \underline{\underline{200 + 60 + 7}} \end{aligned}$$

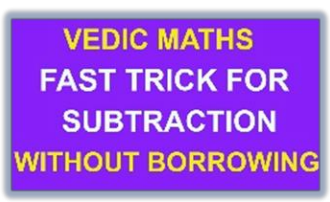
วิธีการลบเช่นนี้เป็นวิธีง่ายเหมาะกับนักเรียนอนุบาล แต่ไม่สามารถแต่ไม่สามารถใช้อะไรได้ในระยะเวลาอันยาวนาน (long run) วิธีการลบที่แสดงไว้ในตัวอย่างที่ 1 นั้นเป็นวิธีที่มีการยืม น่าเบื่อและยุ่งยาก

ต่อไปนี้จะให้เราเข้าใจถึงวิธีการของเวทคณิตที่ทำให้เราจัดการกับปัญหาเหล่านี้

การลบแบบเวทคณิตจะเน้นถึงการใช้ในการแก้ปัญหาการที่ต้องใช้เวลานานให้อยู่ภายในสองสามวินาที เวทคณิตสำหรับการลบนั้นใช้วิธีที่แยกคิดในแต่ละหลักเป็นอิสระต่อกันกล่าวคือ “หลักหน่วยกระทำกับหลักหน่วย หลักสิบกระทำกับหลักสิบ หลักร้อยกระทำกับหลักร้อย เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ” โดยที่แต่ละหลักจะไม่มีการยืมจากหลักที่มีค่ามากกว่าแบบวิธีดั้งเดิม ดังในกรณีที่ตัวเลขของตัวตั้งมีค่าน้อยตัวเลขของตัวลบ ณ หลักเดียวกันนั้น ๆ ด้วยการเปลี่ยนการลบเป็นการบวก จึงเรียกว่าธีการลบนี้ว่า

“วิธีการแยกหลัก (Digit Separator Method)”

การลบด้วยวิธีเวทคณิตเป็นการสับเปลี่ยน (Transpose) การบวกแทนการลบและยังใช้วิธีคิดเลขแยกแต่ละหลัง



จึงเรียกวิธีการคิดนี้ว่า “วิธีการแยกหลัก (Digit Seperator Method)” ด้วยการนำสูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือการลบด้วยสูตรนิขิลัมนั้น ไปหาตัวเติมเต็มของเก้าของตัวเลขทุกตัวของส่วนหน้าและตัวเติมเต็มสิบของส่วนสุดท้ายซึ่งมีตัวเลขเพียงตัวเดียวของ**ตัวลบ** จนได้ผลลัพธ์เป็น**จำนวนเติมเต็มของตัวลบ** จากนั้นนำจำนวนเติมเต็มของตัวลบนี้ไปบวกกับจำนวนที่เป็นตัวตั้ง ผลบวกที่ได้ก็จะเป็นคำตอบที่เป็นการลบของสองจำนวนนี้ **นี่คือหลักของวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตนั่งเอง**

ขั้นตอนการคิดเป็นดังนี้

- เขียนตัวตั้งอยู่เหนือตัวลบ เช่นเดียวกับวิธีดั้งเดิม โดยให้ตัวเลขแต่ละหลักของตัวตั้งกับตัวลบอยู่ตรงตำแหน่งหลักเดียวกัน
- หาจำนวนเติมเต็มของตัวลบ โดยหาตัวเติมเต็มเก้าของตัวเลขแต่ละตัวของส่วนหน้า และส่วนตัวสุดท้ายหาตัวเติมเต็มสิบของตัวลบ ด้วยวิธี “สูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม” ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเติมเต็มของตัวลบนี้

- จากนั้นนำจำนวนเติมเต็มนี้ไปบวกของตัวตั้งด้วยการบวกวิธีใช้จุดหรือวิธีการเพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า ตามที่กล่าวมาแล้วในบทที 1 ส่วนผลบวกหน้าสุดที่เกินอยู่ 1 ของผลบวกสองจำนวนนี้ให้ตัดทิ้ง ก็จะเป็นผลลบที่เป็นคำตอบของตัวตั้วตั้งและตัวลบตามที่กำหนดให้
- แต่การลบยังไม่สิ้นสุดสมบูรณ์โดยสินเชิง ต้องตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ ด้วยวิธีการยันความถูกต้อง

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.3.1 กรณีที่ตัวตั้งมากกว่าตัวลบและทุกหลักของตัวตั้งมากกว่าทุกหลักของตัวลบ

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ $769845-432134$

วิธีทำ จากตัวลบ 432134 เป็นจำนวนที่มี 5 หลัก แสดงว่าจะต้องหาจำนวนเติมเต็ม 1000000 ของ 432134 **ด้วยวิธี** “ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม ”

ดังนั้น ตัวเติมเต็ม 9 ของ $4,3,2,8,6$ คือ $5,6,7,8,6$ ตามลำดับ และตัวเติมเต็ม 10 ของ 4 คือ 6 วึ่งเป็นตัวสุดท้ายของตัวลบ

ได้จำนวนเติมเต็มของ 432134 คือ 567866

แล้วหาผลบวกของ 769845 กับ 567866 แล้วตัดเลข 1 ที่อยู่ข้างหน้าสุดทิ้ง ดังนี้

ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{rcccccc} + & 7 & 6 & 9 & 8 & 4 & 5 \\ & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 8} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 6}\ - \\ & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline \cancel{1} & 3 & 3 & 7 & 7 & 1 & 1 \end{array} = \cancel{337711} \rightarrow 4 \qquad \longleftarrow \text{จำนวนเติมเต็ม} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ \underline{8} \\ \underline{\underline{-5}} \end{array} \rightarrow -5+9=4$$

คำถาม ทำไมต้องตัด 1 ทิ้ง เพราะว่าเราใช้จำนวนเติมเต็มเข้ามาช่วยให้เปลี่ยนการลบเป็นการบวก ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ด้วยวิธีเชิงเลขคณิต ดังนี้

พิสูจน์เชิงเลขคณิต จากความรู้เรื่อง “ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม ”

$$\begin{aligned} 769845-432134 &= 769845+(-1000000+1000000)-432134 \\ &= -1000000+769845+(1000000-432134) \\ &= -1000000+(769845+567866) \\ &= -1000000+1337711 \\ &= 337711 \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในกรณีตัวย่างนี้ เนื่องจากตัวเลขทุกตัวของตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวเลขทุกตัวของตัวลบตั้ง จึงไม่มีการยืม ถ้าคิดแบบวิธีดั้งเดิมที่ใช้การลบก็ดูไม่ยาก จึงเป็นไปได้ที่สามารถคิด**เลขจากซ้ายไปขวาได้**

$$\begin{array}{r} 7\,6\,9\,8\,4\,5 \\ \underline{4\,3\,2\,1\,3\,4} \\ \underline{\underline{3\,3\,7\,7\,1\,1}} \end{array}$$

จากตัวอย่าง เราดำเนินการลบจากซ้ายไปขวา จะพบว่า ตัวตั้งมากกว่าตัวลบจึงสามารถหา**คำตอบได้เลย**โดยการลบแบบวิธีดั้งเดิม

3.3.2 กรณีที่ตัวตั้งมากกว่าตัวลบและบางหลักของตัวตั้งน้อยกว่าหรือมากกว่าบางหลักของตัวลบ

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ $535-138$

วิธีทำ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{r} 5\;3\;5 \\ -\;\underline{1\;3\;8} \\ \underline{\underline{\quad\quad}} \end{array} \qquad \text{ดังนั้น} \quad \begin{array}{r} 5\;3\;5 \\ {\scriptstyle 8\;6\;2} \\ \underline{1\;3\;8} \\ \underline{\underline{\cancel{1}\;3\;9\;7}} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{จำนวนเติมเต็ม} \\ \\ = 397 \rightarrow 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ -\;\underline{3} \\ \underline{\underline{1}} \end{array}$$

ดำเนินการลบจากซ้ายไปขวา หาตัวเติมเต็มของแต่ละเลขโดดของตัวลบ ด้วยวิธี“ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบหรือสูตรนิขิลัม” จากซ้ายไปขวา ตัวเติมเต็ม 9 ของ 1 คือ 8 ตัวเติมเต็ม 9 ของ 3 คือ 6 และตัวสุดท้ายตัวเติมเต็ม 10 ของ 8 คือ 2 จากนี้หาผลบวกตัวเติมเต็มกับตัวตั้ง แล้วหลักซ้ายสุดคือ 1 ตัดออก

วิธีคิดจากตัวอย่าง สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 535-138 &= 535-1000+1000-138 \\ &= 535+(1000-138)-1000 \\ &= 535+862-1000 = (535+862)-1000 \\ &= 1379-1000 = \cancel{1}379 = 379 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $35567-18978$

วิธีทำ หาจำนวนเติมเต็ม 100000 ของ 18978 คือ 81022

$$\begin{array}{r} 3\;5\;5\;6\;7 \\ -\;\underline{1\;8\;9\;7\;8} \\ \underline{\underline{\quad\quad\quad}} \end{array}$$

หาจำนวนเติมเต็ม 100000 ของ 18978 โดยหาตัวเลขที่บวกกับ 1,8,9,7 แล้วได้ 9 และตัวสุดท้ายหาตัวเลขที่บวกกับ 8 แล้วได้ 10 คือ 2

เมื่อหาจำนวนเติมเต็ม 100000 ของ 18978 คือ 81022 ได้แล้วนำจำนวนเติมเต็มนี้ไปบวกกับตัวตั้ง 35567 $(35567+81022=\cancel{1}16589)$ ก็จะได้ $35567-11828=16589$

วิธีทำ ดังนี้ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{r} 3\;5\;5\;6\;7 \\ {\scriptstyle 8\;1\;0\;2\;2} \\ \underline{1\;8\;9\;7\;8} \\ \underline{\underline{\cancel{1}\;1\;6\;5\;8\;9}} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{จำนวนเติมเต็ม} \\ \\ \rightarrow 35567-11828=16589 \rightarrow 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{6} \\ \underline{\underline{2}} \end{array}$$

วิธีคิดเร็ว $\overset{8\,1\,0\,2\,2}{\dot{3}5567} - 18978 = \cancel{1}16589$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้ถ้าดำเนินการแบบดั้งเดิม แต่ละหลักของตัวลบมากกว่าแต่ละหลักของตัวตั้งจะต้อง มีการยืม $+1$ จากหลักที่มากกว่า แต่เมื่อใช้การบวกแทนการลบ โดดการบวกจำนวนเติมเต็มของตัวลบกับตัวตั้งจะทำให้การลบรวดเร็วกว่า และโอกาสในการลบผิดพลาดน้อยมาก

ตัวอย่างที่ 4 หาค่าของ $6745215 - 4891538$

วิธีทำ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$+\begin{cases} 6\ 7\ 4\ 5\ 2\ 1\ 5 \\ {}^{5\ \ 1\ \ 0\ \ 8\ \ 4\ \ 6\ \ 2}\ - \end{cases} \qquad 3$$

$$\underline{4\ 8\ 9\ 1\ 5\ 3\ 8} \qquad \underline{2}$$

$$\underline{\underline{\cancel{1}\ 1\ 8\ 5\ 3\ 6\ 7\ 7}} = 1853677 \rightarrow 1 \rightarrow \underline{\underline{1}}$$

3.3.3 ในกรณีตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ

การลบในกรณีที่ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบคำตอบเป็นจำนวนลบ อันเนื่องมาจาก**บทนิยามการลบ**

บทนิยาม การลบ $a - b = a + (-b) = -(b - a)$

ก็ดำเนินการได้เช่นดียวกับวิธีการลบที่แสดงมาแล้วข้างต้น **ดังตัวอย่างต่อไปนี้**

ตัวอย่างที่ 4 หาค่าของ $5674932 - 9920979$

วิธีทำ **ใช้นิยามการลบ** $a - b = -(b - a)$ **ก็จะง่ายมาก**

ดังนั้น $5674932 - 9920979 = -(9920979 - 5674932) \rightarrow$ $+\begin{cases} \dot{9}\ \dot{9}\ 2\ \dot{0}\ \dot{9}\ \dot{7}\ 9 \\ {}^{4\ \ 3\ \ 2\ \ 5\ \ 0\ \ 6\ \ 8} \end{cases}$

จำนวนเติมเต็ม $\rightarrow$ $\underline{5\ 6\ 7\ 4\ 9\ 3\ 2}$

$$\underline{\underline{\cancel{1}\ 4\ 2\ 4\ 6\ 0\ 4\ 7}}$$

$\therefore\ 5674932 - 9920979 = -(9920979 - 5674932) = -4246047$

แต่ ยังคงจะดำเนินการลบแบบเดิมก็ได้ แต่ผลลบที่ได้ยังไม่เป็นคำตอบที่แท้จริง ต้องใช้สูตรนิขิลัมแปลงอีกครั้งแล้วผลลบที่ได้ต้องใส่เครื่องหมายลบก็จะได้คำตอบเป็นจำนวนลบที่ถูกต้อง

ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$+\begin{cases} 5\ 6\ 7\ 4\ 9\ 3\ 2 \\ 0\ \ 0\ \ 7\ \ 9\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ - \end{cases} \qquad 0$$

จำนวนเติมเต็มของ 9920979 $\qquad -$

$$\underline{9\ 9\ 2\ 0\ 9\ 7\ 9} \qquad \underline{0}$$

$$\underline{\underline{\cancel{0}\ 5\ 7\ 5\ 3\ 9\ 5\ 3}} = -\ 4246047 \rightarrow 0 \qquad \underline{\underline{0}}$$

หมายเหตุ การหาผลลบของ $5674932-9920979$ เราสามารถหาด้วยวิธีตรง ๆ ได้ เมื่อเราได้ศึกษาวิธีวินคิวลัม เสียก่อน

วิธีวินคิวลัม คือ การแปลงจำนวนปกติเป็นจำนวนที่มีตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์

ตัวอย่างที่ 5 หาค่าของ $11824-35567$

วิธีทำ จากนิยามการลบ $a-b=-(b-a)$ **ดังนั้น** $11824-35567=-(35567-11824)$

ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

ขั้นแรก หา $35567-11824$ $\rightarrow$

$$\begin{array}{r} \dot{}\ \dot{3}\ 5\ 5\ \dot{6}\ 7 \\ {}_{8\ 8\ 1\ 7\ 6} \\ \underline{1\ 1\ 8\ 2\ 4} \\ \underline{\underline{\cancel{1}\ 2\ 3\ 7\ 4\ 3}} \end{array} \rightarrow 1 \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{7} \\ \underline{\underline{1}} \end{array}$$

ขั้นสุดท้าย $11824-35567=-(35567-11824)=-(23743)=-23743$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

ดำเนินการลบของสองจำนวนต่อไปนี้ด้วยวิธี "ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ"

1. $62 - 47$
2. $75 - 28$
3. $51 - 15$
4. $67 - 38$
5. $46 - 25$
6. $65 - 37$
7. $90 - 62$
8. $82 - 38$
9. $444 - 183$
10. $631 - 286$
11. $813 - 345$
12. $695 - 368$
13. $512 - 386$
14. $3456 - 281$
15. $7117 - 1771$
16. $8008 - 3839$
17. $6336 - 3388$
18. $14285 - 7148$
19. $51015 - 27986$
20. $9630369 - 3690963$

3.4 วิธีการวินคิวลัม (Vinculum Method)

วินคิวลัม (Vinculum) เป็นคำในภาษาละติน หมายถึงเส้นตามแนวนอน (–) ใช้เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตรงกับภาษาอังกฤษ บาร์ (Bar)

เรียก สัญกรณ์บาร์(Bar Notation) หรือเครื่องหมายบาร์เขียนสัญกรณ์บาร์

บนตัวเลขแทนตัวเลขลบ เช่น $\overline{1} = -1,\ \overline{2} = -2,\ \overline{3} = -3,\ ...,\ \overline{9} = -9$

แต่ $\overline{0} = 0$ เรียกจำนวนเหล่านี้ ว่า**จำนวนบาร์** (Bar Number)

$\overline{1}$ อ่านว่าบาร์หนึ่ง

$\overline{2}$ อ่านว่าบาร์สอง

$\overline{3}$ อ่านว่าบาร์สาม เป็นต้น

จากความรู้เรื่อง สูตรนิขิลัม (ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ) และสูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ (โดยการเพิ่ม 1 กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้า) นำไปใช้ดำเนินแปลงเลขโดดบวกของจำนวนปกติให้เป็นเลขโดดคละ เลขโดดบวก หรือเลขโดดลบเป็นจำนวนจำนวนบาร์ (หรือจำนวนที่ติดเครื่องหมาบบาร์)

สรุป วิธีวินคิวลัม คือ การแปลงจำนวนปกติเป็นจำนวนที่มีตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์ ซึ่งเรียกว่า “จำนวนบาร์”

วิธีแปลงจำนวนปกติ (Natural Number) เป็นจำนวนบาร์ (Bar Number) มีขั้นตอนดังนี้

- หาตัวเติมเต็ม (Complement) ของแต่ละตัวของจำนวนนั้นด้วยสูตรนิขิลัมที่กำหนดให้ และใส่บาร์ (Bar)
- แล้วใช้วิธี โดยเพิ่ม 1 ของตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า

จำนวนปกติ	วิธีแปลง	จำนวนบาร์
6	$10-4$	$1\overline{4}$
97	$100-3$	$10\overline{3}$
289	$290-1 = 300-11$	$29\overline{1} = 3\overline{1}\,\overline{1}$

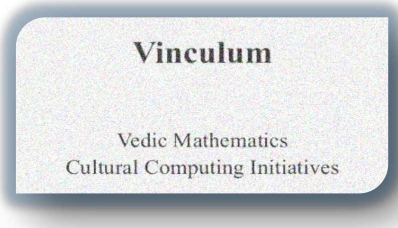
สังเกตได้ว่า ในการแปลงจำนวนปกติเป็นจำนวนจำนวนบาร์นั้น เราใช้ สูตรนิขิลัม (ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ) และสูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ (โดยการเพิ่ม 1 กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้า)

เช่น $79 = \overset{1}{7}\overline{1} = 8\overline{1}$

หาตัวเติมเต็ม 10 ของ 9 คือ 1 และใส่เครื่องหมายบาร์บน เลข 1 จากนั้นเพิ่ม 1 ที่ตัวเลขถัดไปข้างหน้าหรือหลักที่มีค่ามากกว่า ได้ เป็น $8\overline{1}$ แทน 79 (จำนวนปกติ)

หรือ $437 = 4\overset{1}{3}\overline{3} = 44\overline{3}$ หาตัวเติมเต็ม 10 ของ 7 คือ 3 และใส่เครื่องหมายบาร์บน เลข 3 แล้วเพิ่ม 1 ที่ตัวเลขถัดไปข้างหน้า ได้ $44\overline{3}$ เรียกจำนวนข้างต้นว่า**จำนวนบาร์ (Bar Number)**

บทนิยาม 1 จำนวนบาร์ (Bar Number) เป็นจำนวนที่มีตัวเลขเหล่านั้นอย่างน้อย 1 หลักเป็นเลขลบโดยเขียนสัญกรณ์บาร์อยู่บนตัวเลขเรียกว่า เลขบาร์



หมายเหตุ 1. สัญกรณ์บาร์ ตรงกับภาษาสันสกฤต คือ (Mishrank)

2. เลขบาร์ ตรงกับภาษาสันสกฤต คือ เรขางกะ (Rekhank)

3. ตัวเติมเต็ม ตรงกับภาษาสันสกฤต คือ ปูรัก (Purak)

4. จำนวนบาร์ ที่ตัวเลขแต่ละหลักของจำนวนบาร์ นั้นมีค่าไม่มากกว่า 5 จะถูกนิยามว่า **จำนวนวินคิวลัม** (Vinculum Number) เช่น $1\bar{2}$,$10\bar{3}$,$3\bar{1}\bar{1}$,$\bar{1}\bar{0}\bar{4}35$,$3\bar{1}\bar{4}\bar{5}$,... ซึ่งจะศึกษาในบทต่อไป

สรุป การแปลงตัวเลขปกติเป็นตัวเลขบาร์มีขั้นตอนที่ใช้ดังนี้

- กำหนดตัวเลขโดด ณ หลักใด ๆ ที่จะแปลเป็นตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์ได้แล้ว ก็ใช้วิธีหาครบสิบของตัวเลขนี้ก็จะได้ตัวเติมเต็มสิบ ส่วนตัวเลขถัดไปที่อยู่ข้างหน้าก็ใช้วิธีหาครบเก้าก็จะได้ตัวเติมเต็มเก้า จะหากี่ตัวก็ได้แล้วแต่ที่กหนดให้ โดยการใช้ สูตรนิขิลัม
- เมื่อสิ้นสุดการใช้สูตรนิขิลัม ตามที่กำหนดให้แล้วก็ให้เพิ่ม 1 กับตัวเลขที่อยู่หลักถัดไปข้างหน้าของตัวเลขนั้น (ใช้สูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ)

ตัวอย่าง 1. เปลี่ยนจำนวน 438 ให้เป็นจำนวนที่จะติดเครื่องหมายบาร์เพียงตัวเดียว วิธีการเป็นเช่นนี้ ที่ตัวสุดท้าย 8 หาตัวเลขที่นำมาบวกกับ 8 แล้วได้ครบสิบก็คือ 2 จากนั้นใส่สัญกรณ์บาร์หรือเครื่องหมายบาร์บน 2 $(\bar{2})$ ส่วนตัวเลขที่อยู่ข้างหน้า 2 คือ 3 ให้เพิ่ม 1 คือ $\overset{+1}{3}=4$ ก็จะได้แบบนี้ $438=4\overset{+1}{3}\overset{\bar{2}}{8}=44\bar{2}$

ในทำนองเดียวกัน เปลี่ยนที่สองตัวสุดท้ายของ 4<u>38</u> ณ ที่ 8 หาครบสิบคือ 2 ที่ 3 หาครบเก้าคือ 6 แล้วเขียน ใส่เครื่องหมายบาร์ 2 $(\bar{2})$ และ 6 $(\bar{6})$ จากนั้นเพิ่ม ให้กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ 3 คือ 4 $(\overset{+1}{4})$

ได้จำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์ แบบนี้ $438=\overset{+1}{4}\overset{\bar{6}}{3}\overset{\bar{2}}{8}=5\bar{6}\bar{2}$

หรือ เปลี่ยนทุกตัวของ 438 ให้ติดเครื่องหมายบาร์ จากตัวท้ายสุดที่ 8 หาครบสิบคือ 2 ส่วนตัวเลขข้างหน้า 8 ทุกตัว 3,4 หาครบเก้าคือ 6,5 แล้วใส่สัญกรณ์บาบน 2 $(\bar{2})$ และ 6 $(\bar{6})$ กับ 5 $(\bar{5})$ จากนั้นเพิ่ม 1ให้กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ 4 ไม่มี ก็คือ 0 ดังนั้น ต้องได้ $(\overset{+1}{0}=1)$

ได้จำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์ แบบนี้ $438=\overset{+1}{0}\overset{\bar{5}}{4}\overset{\bar{6}}{3}\overset{\bar{2}}{8}=1\bar{5}\bar{6}\bar{2}$

2. เปลี่ยนตัวเลขบนเส้นที่ขีดเส้นใต้ของจำนวน 421<u>3871</u>20 ให้เป็นจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์ วิธีการในทำนองเดียวกัน จากตัวเลขที่ขีดเส้นใต้ <u>871</u> ในชุดนี้ เป็นตัวเลข 1 เป็นตัวเลขท้ายหาครบสิบคือ 9 ส่วนตัวเลขข้างหน้า 1 ทุกตัว 8,7 หาครบเก้าคือ 1,2 แล้วใส่เครื่องหมาบบาร์บน 9 $(\bar{9})$ และ 1 $(\bar{1})$ กับ 2 $(\bar{2})$ จากนั้นเพิ่ม 1 ให้กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ 8 (421<u>3871</u>20) คือ 3 ดังนั้น ได้ $(\overset{+1}{3}=4)$

ดังนั้น $421387120=4214\bar{1}\bar{2}\bar{9}20$

ถ้าอยากจะทราบว่าผลลัพธ์ถูกต้องหรือไม่ จากการยันความถูกต้องด้ววิธีคัดออกเก้า ตรวสอบได้ดังนี้

$$421381720 = 4214\overline{1}\overline{2}\overline{9}20$$

$$4\cancel{2}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{8}1\cancel{7}\cancel{2}\cancel{0} = 42\cancel{1}\cancel{4}\overline{1}\cancel{\overline{2}}\cancel{\overline{9}}\cancel{2}\cancel{0}$$ (โดยประจักษ์)

หรือ เปลี่ยนตัวเลขบนเส้นที่ขีดเส้นใต้ของจำนวน $4\underline{21}38\underline{7120}$ ให้เป็นจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์ **จากจำนวนที่กำหนดให้** แบ่งจำนวนที่จะเปลี่ยนเป็นจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์เป็นสองชุด คือ $\underline{21}$ และ $\underline{7120}$ **ดังนั้น ชุดแรก** $\underline{21}$ ในชุดนี้ เป็นตัวเลข 1 เป็นตัวเลขท้ายหาครบสิบคือ ๙ ส่วนตัวเลขข้างหน้า 1 คือ ๒ หาครบเก้าคือ ๗ แล้วเครื่องหมาบบาร์บน ๙ $(\bar{9})$ และ ๗ $(\bar{7})$ จากนั้นเพิ่ม 1 ให้กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ ๒ คือ ๔ ดังนั้น ได้ $(\overset{+1}{4} = 5)$ เพราะฉะนั้น $4\underline{21}38\underline{7120} = \overset{+1}{4}\,\overset{\bar{7}}{2}\,\overset{\bar{9}}{1}38\underline{7120} = 5\overline{7}\overline{9}38\underline{7120}$

ชุดที่ 2 $\underline{7120}$ เนื่องจากตัวสุดท้ายคือ ๐ แต่ $\bar{0} = 0$ จึงไม่สามารถเปลี่ยนได้ (โดยประจักษ์) เมื่อเป็นเช่นนี้ ส่วนที่จะเปลี่ยนตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์คือ $\underline{712}$ ตัวสุดท้ายของชุดนี้คือ ๒ หาครบสิบคือ ๘ ส่วนตัวเลขข้างหน้า ๒ คือ 7,1 หาครบเก้าคือ 2,8 แล้วเครื่องหมายบาร์บน ๘ $(\bar{8})$ และ ๒ $(\bar{2})$, ๘ $(\bar{8})$ ตามลำดับ จากนั้นเพิ่ม 1 ให้กับตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ ๗ คือ ๘ ดังนั้น ได้ $(\overset{+1}{8} = 9)$ เพราะฉะนั้น

$$421387120 = 5\overline{7}\overline{9}3\,\overset{+1}{8}\,\overset{\bar{2}}{7}\,\overset{\bar{8}}{1}\,\overset{\bar{8}}{2}\,0 = 5\overline{7}\overline{9}39\overline{2}\overline{8}\overline{8}0$$

การแปลงจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์เป็นจำนวนปกติ

การแปลงจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์กลับไปเป็นจำนวนปกตินั้น เป็นกระทำในทางตรงกันข้ามของวิธีแปลงจำนวนปกติเป็นจำนวนบาร์ สูตรที่ใช้ในเวทคณิตนั้น <u>คือสูตรที่ 2 สูตรนิขิลัม (ทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ) กับสูตรที่ 14 เอกันยูเนนะ ปูรเวณะ (จำนวนที่น้อยกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้า)</u> มีขั้นตอนที่ใช้ดังนี้

- ณ หลักใด ๆ ที่ตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์ เพียงตัวเลขตัวเดียวให้ตัวเติมเต็ม ด้วยวิธีหาครบสิบของตัวเลขตัวนั้นแล้วตังเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของตัวนั้นให้ลดค่าออก 1 เช่น $44\bar{2}$ จะเปลี่ยนเป็นจำนวนปกติ เนื่องจากมีเลขติดบาร์เพียงตัวเดียวคือ $\bar{2}$ หาตัวเติมเต็มสิบของ ๒ คือ ๘ จากนั้นตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของ $\bar{2}$ คือ ๔ ต้องลบออก 1 $(4-1=3)$ ก็จะได้จำนวนปกติ คือ $44\bar{2} = 4\overset{-1}{4}8 = 438$ หรือ $56\bar{9}241$ ในทำนองเดียวกัน $56\bar{9}241 = 5\overset{-1}{6}1241 = 551241$
- ถ้าตัวเลขที่ติดเครื่องหมายบาร์ประกอบกันหลาย ๆตัว และเป็นชุด ๆ ในแต่ละชุดหาตัวเติมเต็มเก้าของแต่และตัวละตัวของส่วนหน้าแต่ตัวสุดท้ายของส่วนนั้น ๆ หาตัวเติมเต็มสิบ จากนั้น ลบ 1 จากตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าของแต่ละชุดนั้น ๆ ตัวอย่าง เช่น

$$5\bar{5}\bar{2} = \overset{-1}{5}48 = 448$$

$$1\bar{5}\bar{6}\bar{2} = \overset{-1}{1}438 = 0438 = 438$$

$$4214\bar{1}\bar{2}\bar{9}20 = 421\overset{-1}{4}\overset{8}{\bar{1}}\overset{7}{\bar{2}}\overset{1}{\bar{9}}20 = 421381720$$

$$5\bar{7}\bar{9}39\bar{2}\bar{8}\bar{8}0 = \overset{-1}{5}\overset{2}{\bar{7}}\overset{1}{\bar{9}}3\overset{-1}{9}\overset{7}{\bar{2}}\overset{1}{\bar{8}}\overset{2}{\bar{8}}0 = 421387120$$

ข้อสังเกต มีหลายวิธีการในการแปลงจำนวนปกติให้เป็นจำนวนบาร์ได้หลายรูปแบบที่แทนจำนวนนั้นได้

ตัวอย่างเช่น $86 = 90 - 4 = 9\bar{4}$

หรือ $86 = 100 - 14 = 1\bar{1}\bar{4}$

ดังนั้น $86 = 9\bar{4} = 1\bar{1}\bar{4} = 1\bar{9}\bar{1}\bar{4} = 1\bar{9}\bar{9}\bar{1}4 = \ldots$

จำนวนลบทุกจำนวนสามารถแทนด้วยจำนวนวินคิวลัม

ตัวอย่างเช่น $-7 = \bar{7} = -10 + 3 = \bar{1}3$

ในทำนองเดียวกัน $-36 = \bar{3}\bar{6} = -100 + 64 = \bar{1}64$

และ $-978 = \bar{9}\bar{7}\bar{8} = -1000 + 22 = \bar{1}022$

สูตรที่ 14 เอกันยูเนนะ ปูรเวณะ

หรือจำนวนที่น้อยกว่าอยู่หนึ่งของตัวที่อยู่ถัดไปข้างหน้า

(Sūtra 14. Ekanyūnena Pūrveṇa = सूत्र १४. एकन्यूनेन पूर्वेण)

Ekanyūnena Pūrveṇa mean By One less than the One Before

Eka = เอก ค. เอก หนึ่ง เดียว (one , Anya – other)

ūnena = ยูเนนะ – (Less)

Purva = ปูรฺวฺว ค. ก่อน ประถม แรก (before)

Pūrveṇa = ปูรเวณ ก.ว. ทางทิศตะวันออก (Pursvena – before ,What used to be before)

ภาคผนวกวิธีการวินคิวลัม

บทนิยาม 1 สำหรับจำนวนเต็ม m ใด ๆ $-m$ เขียนแทนด้วย $\bar{m}$ (อ่านว่าบาร์เอ็ม)

ซึ่งหมายความว่า $\bar{m} = -m$

บทนิยาม 2 สำหรับจำนวน m ในระบบเลขฐานสิบ

$m = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0$ โดยที่สำหรับเลขโดด $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_{,1}, a_0$

$\bar{m} = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0} = \bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \bar{a}_{n-2} \ldots \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$

สมบัติของการดำเนินการวินคิวลัม

1. $\overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$
2. $\overline{mn} = \bar{m}\ \bar{n}$
3. $\overline{\left(\dfrac{m}{n}\right)} = \dfrac{\bar{m}}{\bar{\bar{n}}}$ $, n \neq 0$
4. $\bar{\bar{m}} = m$
5. $\overline{m+\bar{n}} = \bar{m} + n$

3.5 การลบด้วยวิธีการวินคิวลัม (Subtraction by Vinculum Method)

การลบด้วยวิธีการวินคิวลัมเป็นการลบด้วยวิธีการแยกหลัก (Digit Seperator Method) และเป็นวิธีทางเลือกอีกวิธีหนึ่งของการคิดเลขเร็ว แต่ต้องมีความรู้วิธีการวิคิวลัมที่กล่าวมาแล้วข้างต้น คือการแปลจำนวนปกติเป็นจำนวนบาร์ และจากนิยามการลบ สามารถนำมาประยุกต์ใช้การดำเนินการลบกับหลาย ๆ จำนวนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

นิยาม การลบ $a - b = a + (-b)$ เมื่อ $-b$ เป็นตัวผกผันการบวกของ b

เพราะว่า $b + (-b) = 0$ สมบัติการมีการผกผัน

ดังนั้น $a - b = a + (-b) = a + \bar{b}$ $\because -b$ เขียนอยู่ในรูปตัวเลขติดเครื่องหมายบาร์

เช่น $3 + (-8) = 3 + \bar{8} = \bar{5}$

$9 + (-5) = 9 + \bar{5} = 4$

$4 + (-4) = 4 + \bar{4} = 0 = \bar{0}$

$-7 + 3 = \bar{7} + 3 = \bar{4}$

$0 + \bar{2} = \bar{2} + 0 = \bar{2}$

ขั้นตอนการคิดเป็นดังนี้

- เขียนตัวตั้งอยู่เหนือตัวลบ โดยให้ตัวเลขแต่ละหลักของตัวตั้งกับตัวลบอยู่ตำแหน่งเดียวกัน
- ตัวลบ เปลี่ยนเป็นจำนวนบาร์ โดยตัวเลขตัวทุกตัวของตัวลบให้ใส่เครื่องหมายบาร์บนตัวเลขทุกตัวนั้น

- จากนั้นเปลี่ยนการลบเป็นการบวก โดยการหาผลบวกแต่ละหลักของตัวตั้งกับตัวลบที่ติดเครื่องหมายบาร์ เป็นการบวกแบบปกติ
- ผลบวกที่ได้ให้เปลี่ยนจากจำนวนที่ติดเครื่องหมายบาร์เป็นจำนวนปกติ ก็จะได้คำตอบของการลบทั้งสองจำนวนที่กำหนดให้นั้น

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ $657-489$ ด้วยวิธีการวินคิวลัม

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 6\ 5\ 7 \\ \underline{4\ 8\ 9} \end{array}{}^{-} \quad \begin{array}{c}\rightarrow \\ \rightarrow\end{array} \quad \begin{array}{r} 6\ 5\ 7 \\ \underline{\bar{4}\ \bar{8}\ \bar{9}} \\ \underline{\underline{2\ \bar{3}\ \bar{2}}} \end{array}{}^{+} = 168$$

ในที่นี้ $7+\bar{9}=\bar{2}$

$5+\bar{8}=\bar{3}$

$6+\bar{4}=2$

คำตอบที่ได้ $2\bar{3}\bar{2}=168$ ใช้สูตรนิขิลัม และสูตรเอกันยูเนนะ ปูรเวณะ เปลี่ยนเป็นจำนวปกติ

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ $6767-1908$ ด้วยวิธีการวินคิวลัม

วิธีทำ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{r} 6\ 7\ 6\ 7 \\ \underline{1\ 9\ 0\ 8} \end{array}{}^{-} \quad \begin{array}{c}\rightarrow \\ \rightarrow\end{array} \quad \begin{array}{r} 6\ 7\ 6\ 7 \\ \underline{\bar{1}\ \bar{9}\ \bar{0}\ \bar{8}} \\ \underline{\underline{5\ \bar{2}\ 6\ \bar{1}}} \end{array}{}^{+} = 4859 \rightarrow \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{0} \\ \underline{\underline{8}} \end{array}{}^{-}$$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $23451-75643$ ด้วยวิธีการวินคิวลัม

วิธีทำ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 5\ 1 \\ \underline{7\ 5\ 6\ 4\ 3} \end{array}{}^{-} \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 5\ 1 \\ \underline{\bar{7}\ \bar{5}\ \bar{6}\ \bar{4}\ \bar{3}} \\ \underline{\underline{\bar{5}\ \bar{2}\ \bar{2}\ 1\ \bar{2}}} \end{array}{}^{+} \rightarrow \bar{1} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \underline{\bar{7}} \\ \underline{\underline{\bar{1}}} \end{array}{}^{+}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{5}\bar{2}\bar{2}1\bar{2}=-(522\bar{1}2)=-(52192)=-52192$

ตัวอย่างที่ 4 หาค่าของ $46578567-32419089$

วิธีทำ ยันความถูกต้อง (ด้วยวิธีคัดออกเก้า)

$$\begin{array}{r} 4\ 6\ 5\ 7\ 8\ 5\ 6\ 7 \\ \underline{3\ 2\ 4\ 1\ 9\ 0\ 8\ 9} \end{array}{}^{-} \quad \begin{array}{r} 4\ 6\ 5\ 7\ 8\ 5\ 6\ 7 \\ \underline{\bar{3}\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{1}\ \bar{9}\ \bar{0}\ \bar{8}\ \bar{9}} \\ \underline{\underline{1\ 4\ 1\ 6\ \bar{1}\ 5\ \bar{2}\ \bar{2}}} \end{array}{}^{+} \rightarrow 3 \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \underline{0} \\ \underline{\underline{3}} \end{array}{}^{+}$$

เพราะฉะนั้น $1416\bar{1}5\bar{2}\bar{2}=14259478$

ตัวอย่างที่ 5 จากตัวอย่างที่ 4 หน้า 64 หาค่าของ $5674932-9920979$

วิธีทำ เดิมใช้นิยามการลบ $a-b=-(b-a)$

ดังนั้น $5674932-9920979=-(9920979-5674932)$ $\rightarrow$ $\dot{9}\;\dot{9}\;2\;\dot{0}\;\dot{9}\;\dot{7}\;9$

จำนวนเติมเต็ม $\rightarrow$ $\underline{\overset{4}{5}\;\overset{3}{6}\;\overset{2}{7}\;\overset{5}{4}\;\overset{0}{9}\;\overset{6}{3}\;\overset{8}{2}}$

$$-\cancel{1}\;4\;2\;4\;6\;0\;4\;7=-4246047$$

แต่ ถ้าเราใช้วิธีลบด้วยวิธีวินคิวลัมปัญหาก็จะหมดไปและทำให้การลบง่าย รวดเร็ว ดังนี้

$$\begin{array}{r} 5\;6\;7\;4\;9\;3\;2 \\ \underline{9\;9\;2\;0\;9\;7\;9}\;- \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;6\;7\;4\;9\;3\;2 \\ \underline{\bar{9}\;\bar{9}\;\bar{2}\;\bar{0}\;\bar{9}\;\bar{7}\;\bar{9}}\;+ \\ \underline{\bar{4}\;\bar{3}\;5\;4\;0\;\bar{4}\;\bar{7}} \end{array} = \overline{4246047} = -4246047$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 3 หาผลลบของสองจำนวนต่อไปนี้ด้วยวิธีการวินคิวลัม

1. $543 - 168$	2. $567 - 279$	3. $840 - 388$	4. $737 - 588$
5. $8024 - 5339$	6. $6543 - 2881$	7. $7103 - 3991$	8. $6413 - 1878$
9. $124 - 76$	10. $311 - 47$	11. $1356 - 638$	12. $462 - 327$
13. $1101 - 757$	14. $9324 - 6846$	15. $1131 - 9998$	16. $2510 - 7889$
17. $9667 - 6387$	18. $12346 - 3377$	19. $13157 - 9456$	20. $25957 - 275$

21. 55346	22. 99792	23. 35681	24. 121480
83586 −	97928 −	84576 −	94998 −
25. 200	26. 200	27. 3000	28. 7000
276 −	347 −	5638 −	4327 −
29. 4000	30. 5000	31. 2000	32. 6000
7757 −	9846 −	5998 −	7889 −
33. 70000	34. 50000	35. 74684	36. 93000
86399 −	73377 −	46456 −	27545 −
37. 212155	38. 516712	39. 5100006	40. 1147675
358648 −	792846 −	8457641 −	9499834 −
41. 211501	42. 511000	43. 615531	44. 213541
943586 −	47718 −	884576 −	949989 −
45. 214540	46. 515600	47. 513889	48. 116764
524358 −	867928 −	845766 −	949987 −

3.5 การลบด้วยวิธีครบสิบหรือการลบด้วยสูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ

จากความหมายทั่วไปของการลบคือการนำเอาสิ่งของออกจากกลุ่ม หรือความหมายอีกนัยหนึ่งคือ วิธีการที่จะหาจำนวนหนึ่งที่นำไปบวกกับจำนวนใดจำนวนหนึ่งในสองจำนวนที่กำหนดให้แล้วได้ผลบวกหรือผลรวม เป็นจำนวนหนึ่งในสองจำนวนนั้น สองจำนวนนั้นคือตัวตั้ง (Minuend) และตัวลบ (Subtrahend) และจำนวนที่นำไปบวกนั้นคือเศษเหลือ (Remainder) ของการลบ คือผลต่างระหว่าง ตัวตั้งกับตัวลบ

การลบด้วยวิธีครบสิบหรือการลบด้วยวิธีทบสิบ เป็นวิธีการแยกหลัก (Digit Seperator Method)อีกวิธีหนึ่ง เป็นการลบที่ควบรวมการบวกและการลบ และมีการใช้สูตรด้วยการเพิ่ม 1 ซึ่งแทนด้วย **จุด** (•) *ให้กับตัวเลขถัดไปข้างหน้าของตัวลบ*

ขั้นตอนการคิดเป็นดังนี้

- เขียนตัวตั้งอยู่เหนือตัวลบ โดยให้ตัวเลขแต่ละหลักของตัวตั้งกับตัวลบอยู่ตำแหน่งเดียวกัน
- ที่ตัวลบ ให้ดำเนินการตัวเลขทุกตัวของตัวลบ ดังนี้ ถ้าตัวเลขของตัวตั้งมากกว่าตัวของตัวตั้วลบ ณ หลักเดียวกันให้ลบกันได้เลย แต่ถ้าตัวเลขของตัวตั้งน้อยกว่าตัวเลขของตัวลบ ณ หลักเดียวกันให้ใส่จุด (•) ไว้บนตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า และจุด (•= 1) นี้ให้บวกกับตัวเลขถัดไปนี้ด้วย ในขณะเดียวกันหาตัวเติมเต็มสิบของหลักที่ดำเนินการอยู่นี้แล้วนำไปบวกกับตัวเลขตัวตั้งเป็นคำตอบ ณ หลักนี้เลย
- ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จบครบทุกหลัก ผลลัพธ์ที่ครบทุกหลักนั้นจะเป็นคำตอบของการลบ แต่ใช้การบวกแทนการลบ

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ $493672-249895$

ขั้นตอนการคิด $493672-249895$

ขั้นที่ 1 จัดตัวเลขแต่ละหลักของสองจำนวนให้อยู่ตรงตำแหน่งเดียวกัน

ถ้าจำนวนที่ไม่มีเลขหลักนั้นให้ใส่ 0 ตรงตำแหน่งนั้น

$$\begin{array}{rrrrrrl} 4 & 9 & 3 & 6 & 7 & 2 & - \\ \hline \end{array}$$

ขั้นที่ 2 พิจารณาตัวเลขของตัวตั้งและตัวลบที่ละหลัก

หลักหน่วย $2>5$ ใส่จุดบนเลขถัดไปข้างหน้า คือ $\dot{9}=10$

ขณะเดียวกันหาตัวเติมเต็มสิบของ 5 คือ 5 นำไปบวกกับ 2 ของตัวตั้ง

คือ $5+2=7$ แล้วนำ 7 ไปใส่บนช่องหลักหน่วยของคำตอบ

$$\begin{array}{rrrrrrl} 4 & 9 & 3 & 6 & 7 & 2 & - \\ & & & & \dot{9} & \overset{5}{5} & \\ \hline & & & & & 7 & \\ \hline\hline \end{array}$$

หลักสิบ $\dot{9}=10>7$ ใส่จุดบนเลขถัดไปข้างหน้า คือ $\dot{8}=9$

หาตัวเติมเต็มสิบของ $\dot{9}=10$ คือ 0 นำไปบวกกับ 7 ของตัวตั้ง

คือ $0+7=7$ แล้วนำ 7 ไปใส่บนช่องหลักสิบของคำตอบ

$$\begin{array}{rrrrrr} 4 & 9 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ & & & \dot{8} & \overset{0}{\dot{9}} & \overset{5}{5} \\ \hline & & & & 7 & 7 \\ \hline\hline \end{array}$$

หลักร้อย $\dot{8}=9>6$ ใส่จุดบนเลขถัดไปข้างหน้า คือ $\dot{9}=10$

หาตัวเติมเต็มสิบของ $\dot{8}=9$ คือ 1 นำไปบวกกับ 6 ของตัวตั้ง

คือ $1+6=7$ แล้วนำ 7 ไปใส่บนช่องหลักร้อยของคำตอบ

$$\begin{array}{r} 4\;9\;3\;6\;7\;2 \\ \underline{\dot{9}\;\overset{1}{\dot{8}}\;\overset{0}{\dot{9}}\;\overset{5}{5}} \\ \underline{\underline{7\;7\;7}} \end{array}$$

หลักพัน $\dot{9}=10>3$ ใส่จุดบนเลขถัดไปข้างหน้า คือ $\dot{4}=5$

หาตัวเติมเต็มสิบของ $\dot{9}=10$ คือ 0 นำไปบวกกับ 3 ของตัวตั้ง

คือ $0+3=3$ แล้วนำ 3 ไปใส่บนช่องหลักพันของคำตอบ

$$\begin{array}{r} 4\;9\;3\;6\;7\;2 \\ \underline{2\;\dot{4}\;\overset{0}{\dot{9}}\;\overset{1}{\dot{8}}\;\overset{0}{\dot{9}}\;\overset{5}{5}} \\ \underline{\underline{3\;7\;7\;7}} \end{array}$$

หลักหมื่น $\dot{4}=5<9$ พบว่าตัวตั้งมากกว่าตัวลบ สามารถลบกันได้เลย

ดังนั้น $9-5=4$ แล้วนำ 4 ไปใส่บนช่องหลักหมื่นของคำตอบ

ส่วนหลักแสน พบว่า $2<4$ แสดงว่า ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ

$$\begin{array}{r} 4\;9\;3\;6\;7\;2 \\ \underline{2\;\dot{4}\;\overset{0}{\dot{9}}\;\overset{1}{\dot{8}}\;\overset{0}{\dot{9}}\;\overset{5}{5}} \\ \underline{\underline{2\;4\;3\;7\;7\;7}} \end{array}$$

สามารถลบกันได้เลย

ดังนั้น $4-2=2$ แล้วนำ 2 ไปใส่บนช่องหลักแสนของคำตอบ

เพราะฉะนั้น $493672-249895=243777$

แต่การได้คำตอบการลบแล้วยังถือว่าไม่สิ้นสุดการลบนั้นต้องตรวจสอบคำตอบ ด้วยวิธีการยันความถูกต้อง ด้วยการคัดออกเก้ากับการคัดออกสิบเอ็ด

การคัดออกเก้า $493672-249895=243777 \quad \rightarrow \quad 4-1=3$

การค้ออกสิบเอ็ด $493672-249895=243777$

$$(2-7+6-3+9-4)-(5-9+8-9+4-2)=(7-7+7-3+4-2)$$

$$3 \quad - \quad -3 \quad = \quad 6$$

$$6 \quad = \quad 6$$

ขั้นตอนการลบสรุปได้ดังนี้

พิจารณา แต่ละหลักของตัวตั้งและตัวลบหลักต่อหลัก ถ้าตัวหลักของตัวตั้งน้อยกว่าตัวหลักของตัวลบ ให้ใส่จุด $(\bullet)$ บนตัวเลขถัดไปข้างหน้าของตัวลบ ในทางตรงข้ามถ้าตัวหลักของตัวตั้งมากกว่าตัวหลักของตัวลบ ก็ไม่ต้องใส่จุด $(\bullet)$ บนตัวเลขถัดไปข้างหน้าของตัวลบ หลังจากนั้นหาผลลัพธ์แต่ละหลัก หลักที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบหา

ตัวเติมเต็มตัวทบสิบของตัวลบ แล้วนำไปบวกตัวตั้งของหลักเดียวกันนั้นเป็นคำตอบของหลักนั้น ส่วนหลักที่ตัวตั้งมากกว่าตัวลบก็ลบตามวิธีดั้งเดิมของหลักเดียวกันนั้นเป็นคำตอบของหลักนั้น ๆ

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ $5124-3607$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccc} 5 & 1 & 2 & 4 \\ \underline{3} & \underline{6} & \underline{0} & \underline{7} \\ \hline\hline \end{array} - \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 5 & 1 & 2 & 4 \\ & {\scriptstyle 4} & & {\scriptstyle 3} \\ \underline{\dot{3}} & \underline{6} & \underline{\dot{0}} & \underline{7} \\ 1 & 5 & 1 & 7 \\ \hline\hline \end{array} -$$

ขั้นตอนการคิด

1. พิจารณาหลักหน่วยและหลักร้อย ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ (4 น้อยกว่า 7 และ 1 น้อยกว่า 6) ให้ใส่จุด $(\bullet)$ บนตัวเลขถัดไปข้างหน้า คือ บนเลข 0 และ 3 เป็น $\dot{0}$ และ $\dot{3}$

2. หาตัวทบสิบ ของ 6 และ 7 คือ 4 และ 3 แล้วใช้การบวกแทนการลบ นำ $4+1=5$ และ $3+4 = 7$ เป็นผลลัพธ์ของหลักร้อยและหลักหน่วย ส่วนหลักพันและหลักสิบตัวตั้งมากกว่าตัวลบก็ลบแบบปกติ คือ

$5-\dot{3}=5-4=1$ และ $2-\dot{0}=2-1=1$

ดังนั้น $5124-3607=1517$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $927364-598179$

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc} 9 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} \\ \underline{\dot{5}} & \underline{\dot{9}} & \underline{8} & \underline{\dot{1}} & \underline{\dot{7}} & \underline{9} \\ 3 & 2 & 9 & 1 & 8 & 5 \\ \hline\hline \end{array} - \qquad \therefore\ 927346-598179=329185$$

วิธีคิด พิจารณาแต่ละหลักของตัวลบ จากขวาไปซ้าย ถ้าตัวเลขของหลักตัวตั้งน้อยกว่าตัวเลขหลักของตัวลบให้ใส่จุด $(\bullet)$ บนตัวเลขถัดไปข้างหน้าของตัวลบ และพร้อมกับใส่ตัวเติมสิบข้างล่างของตัวเลขหลักนั้นด้วย เมื่อดำเนินการครบทุกหลักแล้ว หาคำตอบ โดยเลขหลักใดมีตัวทบสิบให้หาผลบวกตัวทบสิบกับตัวเลขตัวตั้ง ณ หลักนั้น ๆ ส่วนตัวเลขหลักใดที่ตัวเลขของหลักตัวตั้งมากกว่าตัวเลขของตัวลบ ให้ลบแบบวิธีดั้งเดิม

พิสูจน์ความคิดของการลบด้วยวิธีครบสิบหรือการลบด้วยสูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ

กำหนดให้ หาค่าของ $543-387$

พิสูจน์ จาก $543-387$ แล้วกระจายตามค่าประจำตำแหน่งได้

$543-387$	$=(500+40+3)-(300+80+7)$	สมบัติการกระจาย
	$=(500+100+40+10+3)-(300+100+80+10+7)$	สมบัติการเพิ่มเข้าการบวก
	$=500+100+40+10+3-300-100-80-10-7$	สมบัติการผกผันการบวก
	$=(500-300-100)+40+(100-80-10)+3+(10-7)$	สมบัติการเปลี่ยนหมู่

$$= (500-(300+100))+40+(100-(80+10))+3+(10-7)$$

$$= (500-(400))+40+(100-(90))+3+(10-7)$$

$$= (500-400)+40+(10)+3+(3)$$

$$= 100+50+3=153$$

พิจารณา $100-90=10$ เรียก เป็นจำนวนเติมเต็มร้อยหรือทบร้อย ของ 90

$3\ 10-7=3$ เรียก 3 เป็นจำนวนเติมเต็มสิบหรือทบสิบ ของ 7

แสดงวิธีทำ การลบแบบแนวตั้ง

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 5\quad 4\quad 3 \\ \dot{3}\quad \overset{1}{\dot{8}}\quad \overset{3}{7} \\ \hline 1\quad 5\quad 6 \\ \hline \end{array} -$$

$\therefore\ 543-387=156$

จากตัวอย่างข้างต้นเป็นการลบที่ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ แต่เราก็สามารถหาการลบในกรณีตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบได้ เนื่องจาก $x-y=-(y-x)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $234-7381$

วิธีทำ เนื่องจาก $234-7381=-(7318-234)$

ดังนั้น

$$\begin{array}{r} 7\quad 3\quad 8\quad 1 \\ 0\quad 2\quad \dot{3}\quad 4 \\ \hline 7\quad 1\quad 4\quad 7 \\ \hline \end{array} -$$

ดังนั้น $234 - 7381 = -(7381 - 234) = -7147$

การบวกด้วยวิธีการเพิ่ม 1 ให้กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้า

ในเวทคณิต เป็นการบวกด้วย**สูตรที่ 1 เอกาธิเกนะ ปูรเวณะ**

(Stura 1 Ekādhikena Pūrveṇa = सूत्र १ एकाधिकेन पूर्वेण =)

Ekādhikena Pūrveṇa mean By one more than the one before

Eka = เอก ค. เอก หนึ่ง เดียว (one)

Adhika = อธิก ค. เกิน มาก มากกว่า เหนือ เพิ่มเข้ามา (more)

Purva = ปูรฺวฺว ค. ก่อน ประถม แรก (before)

ปูรเวณ ก.ว. ทางทิศตะวันออก (Purvena – before)

สูตรนี้อธิบายหมายถึงการเพิ่ม 1 ให้กับตัวเลขที่อยู่ถัดไปข้างหน้าของจำนวนนั้น

แบบฝึกหัดชุดที่ 4 การลบด้วยวิธีครบสิบหรือการลบด้วยสูตรเอกาธิเกนะ ปูรเวณะ

1. $\begin{array}{r} 77 \\ \underline{58} \end{array} -$	2) $\begin{array}{r} 61 \\ \underline{58} \end{array} -$	3) $\begin{array}{r} 91 \\ \underline{77} \end{array} -$
4. $\begin{array}{r} 657 \\ \underline{178} \end{array} -$	5. $\begin{array}{r} 931 \\ \underline{856} \end{array} -$	6. $\begin{array}{r} 911 \\ \underline{743} \end{array} -$
7. $\begin{array}{r} 6578 \\ \underline{1562} \end{array} -$	8. $\begin{array}{r} 9011 \\ \underline{7422} \end{array} -$	9. $\begin{array}{r} 3926 \\ \underline{1789} \end{array} -$

3.6 การบวกและการลบระคน

ในวิชาเวทคณิตเรามีการดำเนินการวินคิวลัม ช่วยการลบให้ง่ายขึ้น จะทำให้เกิดความเชื่อมั่นในการคิดเลขได้ดีขึ้น ความผิดพลาดลดลง โดยเฉพาะแล้วการบวกและการลบแบบระคนแล้ว สามารถใช้การดำเนินการวินคิวลัม ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ :

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ $374-253+245-433+327$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 4 \\ -\quad \\ 2\ 5\ 3 \\ +\quad \\ 2\ 4\ 5 \\ -\quad \\ 4\ 3\ 3 \\ +\quad \\ \underline{3\ 2\ 7} \\ \\ \hline\hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 3\ 7\ 4 \\ +\quad \\ \bar{2}\ \bar{5}\ \bar{3} \\ +\quad \\ 2\ 4\ 5 \\ +\quad \\ \bar{4}\ \bar{3}\ \bar{3} \\ +\quad \\ \underline{3\ 2\ \dot{7}} \\ \\ \underline{\underline{2\ 6\ 0}} \end{array}$$

ขั้นตอน เป็นดังนี้

1. จำนวนที่เป็นตัวลบทุกจำนวนใส่เครื่องหมายบาร์ บนตัวเลขทุกตัวของจำนวนนั้น ๆ

2. เปลี่ยนเครื่องหมายลบให้เป็นเครื่องหมายบวกระหว่างสองจำนวนที่ลบกันนั้น แล้วดำเนินการบวกที่ละหลักจากหลักหน่วยไปหลักสิบ จะจากข้างบนลงล่างหรือล่างไปบนกระทำได้เช่นกัน

ในที่นี้ จากข้างบนลงล่าง $4+\bar{3}=1,\ 1+5=6,\ 6+\bar{3}=3,\ 3+7=10$ ครบ 10 แล้วใส่จุดบนเลข 7 $(\dot{7})$ เหลือผลลัพธ์ 0 ใส่ที่หลักหน่วยเป็นคำตอบ

3. ก่อนที่จะดำเนินการที่หลักสิบ ต้องสังเกตว่าหลักหน่วยมีจุดอยู่บนตัวเลขบวกหรือลบที่หลักหน่วยหรือไม่ ในที่นี้จุดอยู่บนเลข 7 $(\dot{7})$ แสดงว่ามีการทดสิบมาจากหลักหน่วย คือ $+1$ ซึ่งต้องนำไปบวกกับตัวเลขหลักสิบต่อไป คือ $1+7=8,\ 8+\bar{5}=3,\ 3+4=7,\ 7+\bar{3}=4,\ 4+2=6$ ซึ่งพบว่าไม่มีการบวกครบ 10 จึงไม่มีการทดไปที่หลักร้อยดำเนินการบวกต่อ

4. ดำเนินการบวกหลักร้อย $3+\bar{2}=1,\ 1+2=3,\ 3+\bar{4}=\bar{1},\ \bar{1}+3=2$ ได้ 2 เป็นคำตอบที่หลักร้อย

ดังนั้น $375-253+245-433+327=260$

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ $319-596+703-986$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{ccc}
3 & 1 & 9 \\
5 & 9 & 6^{-} \\
7 & 0 & 3^{+} \\
\underline{9} & \underline{8} & \underline{6}^{+} \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
3 & 1 & 9 \\
\bar{5} & \dot{\bar{9}} & \bar{6}^{+} \\
7 & 0 & 3^{+} \\
\underline{\bar{9}} & \underline{\bar{8}} & \underline{\bar{6}}^{+} \\
\bar{5} & \bar{6} & 0
\end{array} = -560
$$

เมื่อ $\bar{\bullet} = -1$

หลักหน่วย $9+\bar{6}=3 \rightarrow 3+3=6 \rightarrow 6+\bar{6}=0$

หลักสิบ $\bar{8}+0=\bar{8} \rightarrow \bar{8}+\bar{9}=\bar{1}\bar{7}$ พบว่า ผลบวกหลักสิบได้ $\bar{1}\bar{0}+\bar{7}$ ครบ -10 ใส่จุดติดลบแทนด้วย $\bar{\bullet}$ ซึ่งหมายถึง $\bar{\bullet}=-1$ ไว้บน $\bar{9}$ $\left(\dot{\bar{9}}\right)$ แล้วดำเนินการบวก $\bar{7}+1=\bar{6}$ เป็นผลลัพธ์หลักสิบ

หลักร้อย เนื่องจากมีการทด $\bar{\bullet}=-1$ จากหลักสิบ ดังนั้นจากข้างบน

$-1+3=2 \rightarrow 2+\bar{5}=\bar{3} \rightarrow \bar{3}+7=4 \rightarrow 4+\bar{9}=\bar{5}$ เป็นผลลัพธ์หลักร้อย

ดังนั้น $319-596+703-986=\bar{5}\bar{6}0=-560$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $39143-15081+48989-6882-14361$

วิธีทำ ดำเนินการลบจากบนไปล่าง

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & 9 & 1 & 4 & 3 \\
1 & 5 & 0 & 8 & 1^{-} \\
4 & 8 & 9 & 8 & 9^{+} \\
 & 6 & 8 & 8 & 2^{+} \\
\underline{1} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{6} & \underline{1}^{-} \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
3 & 9 & 1 & 4 & 3 \\
\bar{1} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{8} & \bar{1}^{+} \\
4 & \dot{8} & 9 & 8 & \dot{9}^{+} \\
0 & \bar{6} & \bar{8} & \bar{8} & \bar{2}^{+} \\
\underline{\bar{1}} & \underline{\bar{4}} & \underline{\bar{3}} & \underline{\bar{6}} & \underline{\bar{1}}^{+} \\
6 & \bar{8} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{2}
\end{array} = 51808
$$

ตัวอย่างที่ 4 หาค่าของ $3456-2989+4121-1859$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{cccc}
3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & & - \\
2 & 9 & 8 & 9 \\
 & & & + \\
4 & 1 & 2 & 1 \\
 & & & + \\
\underline{1} & \underline{8} & \underline{5} & \underline{9} \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{cccc}
3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & & + \\
\bar{2} & \bar{9} & \bar{8} & \bar{9} \\
 & & & + \\
4 & 1 & 2 & 1 \\
 & & & + \\
\bar{1} & \dot{\bar{8}} & \bar{5} & \dot{\bar{9}} \\
\hline
3 & \bar{2} & \bar{7} & \bar{1} \\
\hline\hline
\end{array} = 2729
$$

ตัวอย่างที่ 5 หาค่าของ $4345791-6435154-870189+2317898-498447+9914456$

วิธีทำ

$$
\begin{array}{ccccccc}
4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 1 \\
 & & & & & & - \\
6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 5 & 4 \\
 & & & & & & - \\
0 & 8 & 7 & 0 & 1 & 8 & 9 \\
 & & & & & & + \\
2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\
 & & & & & & - \\
 & 4 & 9 & 8 & 4 & 4 & 7 \\
 & & & & & & + \\
9 & 9 & 1 & 4 & 4 & 5 & 6 \\
\hline\hline
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 1 \\
 & & & & & & + \\
\bar{6} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\
 & & & & & & + \\
0 & \dot{\bar{8}} & \bar{7} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{8} & \dot{\bar{9}} \\
 & & & & & & + \\
2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 8 \\
 & & & & & & + \\
0 & \bar{4} & \dot{\bar{9}} & \bar{8} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{7} \\
 & & & & & & + \\
9 & 9 & 1 & 4 & \dot{4} & 5 & 6 \\
\hline
8 & 8 & \bar{3} & 4 & 3 & 5 & 5 \\
\hline\hline
\end{array} = 8774355
$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 6. หาค่าของดำเนินการบวก ลบ ของจำนวนต่อไปนี้

1\. 345 −
167 +
289
76 +

2\. 100 −
389 +
659
947 +

3\. 1479 +
1350 −
6678
3607 +
5327 −

4\. 2090 −
6357 +
8571 +
9025
4638 −

5\. 1680 −
789 +
6787
757 −

6\. 4709 −
8196 −
2781
846 +

7\. 44499 +
76786 −
15513
42587 +
15775 −
6387 +

8\. 87016 −
42587
76901 +
12587 −
64593 +
73377 −

9\. 16873589 −
26793986
9768456 +

10\. 7808267814 +
57163985
457196275 −

11. 467878	12. 987899
+	−
578888	977779
−	+
423234	233661
+	−
67878	485858
−	−
407808	767675
+	+
167928	436377
_____	_____