

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - Lec]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้



Lecturer responsible for this course:  
**Mr.Luechai Tiprungsri**


Room Number: **305**  
Tel.: **081-972-5793**  
Email: **[luechai.ti@ssru.ac.th](mailto:luechai.ti@ssru.ac.th)**

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:33  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - system]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้



**System of Linear Equation**

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:33  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 5]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Systems of Linear Equations in n Variables**

A linear equation in n variables is an equation that can be written in the form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

where

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  and  $b$  are real numbers  
and  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  are variables

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:34  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 6]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Systems of Linear Equation in Two Variables**

A systems of linear equations in two variables has the form

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{where } a_1, b_1 \text{ are both non-zero}$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{and } a_2, b_2 \text{ are both non-zero}$$

The following are some examples.

$$3x - y = 0 \quad 8x - 2y = 5 \quad -2x + 6y = 3$$

$$5x + 2y = 22, \quad -12x + 3y = 7, \quad 4x - 12y = -6$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:34  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 7]

เพิ่ม แก้ว แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Definition of systems of equation**

Two or more equation considered simultaneously from a system of equations.

**Definition of a solution**

A solution of a system of two linear equations in two variables is an ordered pair (a,b) that both equations of the system.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:35 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 8]

เพิ่ม แก้ว แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Solution ผลเฉลย**

**Solution set เซตผลเฉลย**

**บทนิยาม**

จำนวน  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  เรียกว่าเป็น ผลเฉลย (Solution) ของสมการเชิงเส้น  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$  เมื่อแทนค่า  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$  แล้วทำให้สมการเป็นจริง และเซตของผลเฉลยของสมการเชิงเส้นนี้เรียกว่า เซตผลเฉลย (Solution set)

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:35 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 9]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example 1** Solve the following system of linear equations using elimination method

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

**Solution 1**

WE will eliminate  $y$  from the equations and solve for  $x$ .

$3x - y = 0 \quad \dots (1)$	From (1); substitute $x=2$ $3(2) - y = 0$ $y = 6$ The solution of system is the order pair $(x,y) = (2,6)$ or The solution set is $\{(2, 6)\}$
$5x + 2y = 22 \quad \dots (2)$	
$2x(1); \quad 6x - 2y = 0 \quad \dots (3)$	
$(2)+(3); \quad 11x = 22$	
$x = \frac{22}{11} = 2$	

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:36 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 10]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example 1** Solve the following system of linear equations

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

**Solution2**

$3x - y = 0 \quad \dots (1)$	substitute $x = 2$ into equation (1) $3(2) - y = 0$ $y = 6$ The solution set is $\{(2, 6)\}$
$5x + 2y = 22 \quad \dots (2)$	
From(1); $y = 3x$	
substitute $y = 3x$ into (2)	
$5x + 2(3x) = 22$ $11x = 22$ $x = 2$	

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:36 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 11]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example 2** Solve the following system of linear equations

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

**Solution**

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \dots (1) \\ -12x + 3y &= 7 \dots (2) \\ 3x(1); 24x - 6y &= 15 \dots (3) \\ 2x(2); -24x + 6y &= 14 \dots (4) \\ (3)+(4); 0 &= 29 \end{aligned}$$

The resulting false statement indicates that there is no solution of the system of equations.

Therefore, the solution set is the empty set, and the system is inconsistent.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:36 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 12]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example 3** Solve the following system of linear equations

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 3 \\ 4x - 12y &= -6 \end{aligned}$$

**Solution**

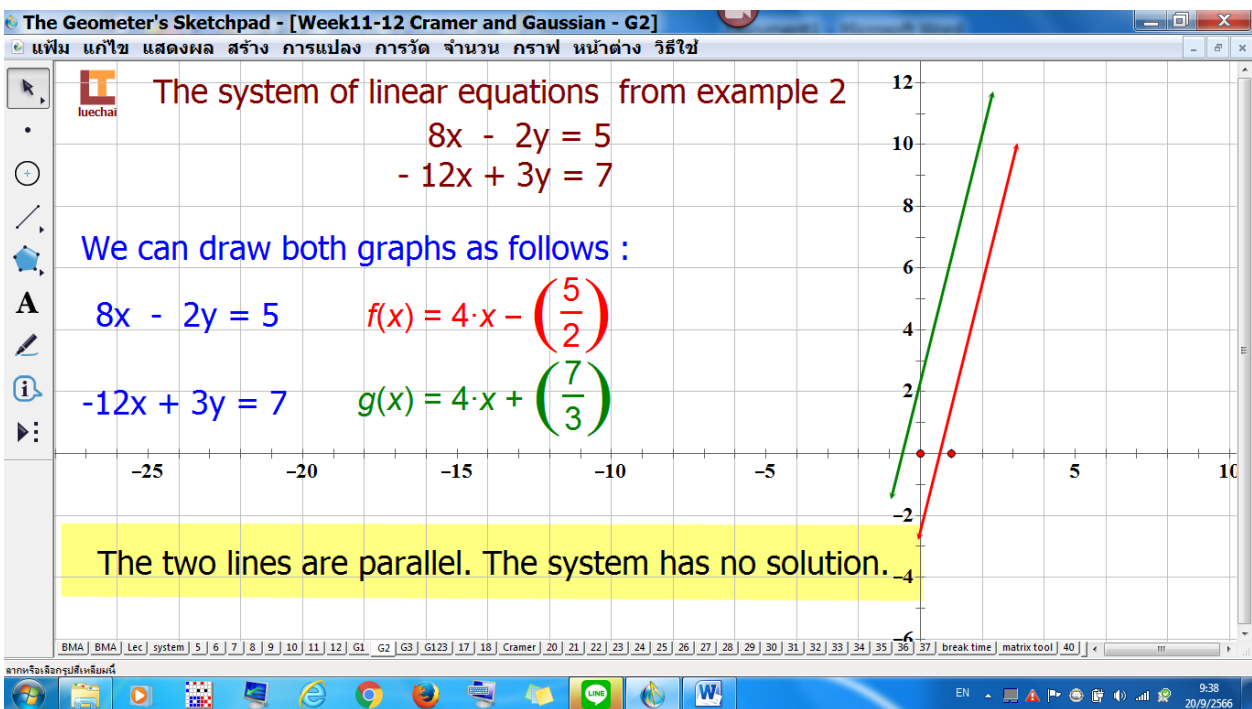
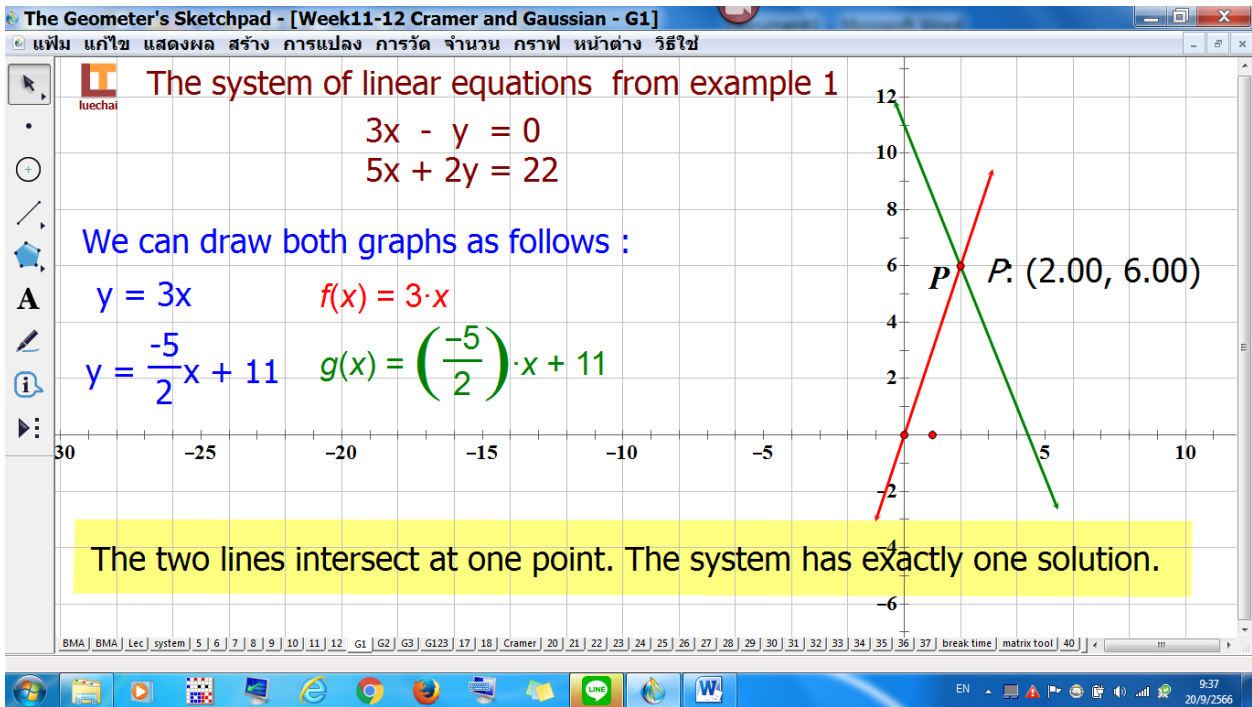
$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 3 \dots (1) \\ 4x - 12y &= -6 \dots (2) \\ 2x(1); -4x + 12y &= 6 \dots (3) \\ (2)+(3); 0 &= 0 \end{aligned}$$

Since the two equations are exactly the same. Therefore, the lines coincide; we can conclude that every point on the line is a solution of the system.

Therefore, the system has infinitely many solutions.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:37 20/9/2566



The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - G3]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิถีไข

The system of linear equations from example 3

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 3 \\ 4x - 12y &= -6 \end{aligned}$$

We can draw both graphs as follows :

$$\begin{aligned} -2x + 6y = 3 & \quad f(x) = \left(\frac{2}{6}\right) \cdot x + \left(\frac{3}{6}\right) \\ 4x - 12y = -6 & \quad g(x) = \left(\frac{4}{12}\right) \cdot x + \left(\frac{6}{12}\right) \end{aligned}$$

The two lines are identical. The system has infinitely many solutions.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:38  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - G123]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิถีไข

$f(x) = 3 \cdot x$   
 $g(x) = \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot x + 11$

Intersecting lines,  
Unique solution

$f(x) = 4 \cdot x - \left(\frac{5}{2}\right)$   
 $g(x) = 4 \cdot x + \left(\frac{7}{3}\right)$

Parallel lines,  
No solution

$f(x) = \left(\frac{2}{6}\right) \cdot x + \left(\frac{3}{6}\right)$   
 $g(x) = \left(\frac{4}{12}\right) \cdot x + \left(\frac{6}{12}\right)$

Two lines that coincide,  
Infinitely many solutions

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:39  
20/9/2566



The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 17]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

## Systems of Linear Equations in Three or more Variables

**Example** Solve the following system of linear equations.

**Solution**

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 10 \\ y + 3z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

The solution is  
 $x = -9, y = -5$  and  $z = 3$

which can be written as  
the ordered triple  $(-9, -5, 3)$

or The solution set is  $\{(-9, -5, 3)\}$

substitute  $z=3$  into (2)  
 $y + 3(3) = 4 \rightarrow y = -5$

substitute  $y=-5$  and  $z=3$  into (1)  
 $x - 2(-5) + 3(3) = 10 \rightarrow x = -9$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:39 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 18]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

## Example

Solve the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11 \\ 2x - 3y + 2z &= 9 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

Using elimination to solve a system

The solution set is  $\{(2, -3, -2)\}$  **ans**

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:40 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - Cramer]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

## Cramer's Rule for Solving a System of Linear Equations

Cramer's Rule named after Gabriel Cramer (1704 - 1752).

This rule use determinants to write the solution of a sistem of linear equations.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:40 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 20]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

For a system of equations written in general form, the following notation is use in connection with Cramer's Rule.

1. For a system of equations

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

the solution is given by

coefficient matrix

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:42 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 21]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example**  
Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

$$1. \quad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ 5x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

**Solution**  
We find the determinant of the coefficient matrix.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 5(-1) = 6 + 5 = 11 \quad \text{determinant is not zero}$$

Therefore, the solution is (2,6)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 22 & 2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 22 \end{vmatrix}}{11} = \frac{66}{11} = 6$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:42 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 22]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example**  
Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

$$2. \quad \begin{aligned} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

**Solution**  
We find the determinant of the coefficient matrix.

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 3 \end{vmatrix} = 8(3) - (-12)(-2) = 0$$

The system has no solution.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{0} = \frac{29}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -12 & 7 \end{vmatrix}}{0} = \frac{116}{0} \quad \text{no definition}$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:43 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 23]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

3.  $-2x + 6y = 3$   
 $4x - 12y = -6$

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (-2)(-12) - 4(6) = 24 - 24 = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}}{0} = \frac{0}{0}$$

The system has infinitely many solutions.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:44  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 24]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

## Exercises

Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

1.  $-x + 2y = 2$   
 $3x + y = 15$

2.  $x - 3y = 5$   
 $-2x + 6y = -10$

3.  $3x + 2y = 2$   
 $6x + 4y = 14$

4.  $3x - 2y = 6$   
 $-6x + 4y = -12$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:45  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 25]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

2. For a system of equations

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

The determinant of the coefficient matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D, D \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:45  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week11-12 Cramer and Gaussian - 26]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Example

Use Cramer's Rule to solve the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11 \\ 2x - 3y + 2z &= 9 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 11 & -3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

The solution set is  $\{(2, -3, -2)\}$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | break time | matrix tool | 40 |

9:46  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - Area Tri]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Area of a Triangle**

The area of a triangle with vertices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  and  $(x_3, y_3)$  is given by

$$\text{Area} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Where the symbol  $(\pm)$  indicates that the appropriate sign should be chosen to yield a positive area.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{x^2}{y}$

10:04 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 28]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Example**

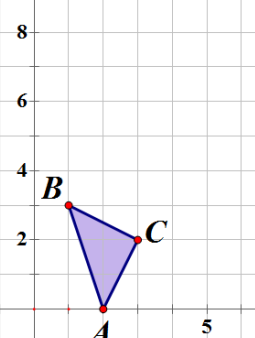
Find the area of the triangle whose vertices are  $(2, 0)$ ,  $(1, 3)$  and  $(3, 2)$

**Solution**

From :  $\text{Area} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

The determinant  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

The area of the triangle is  $-\frac{1}{2}(-5) = 2.5$



A: (2.00, 0.00)  
B: (1.00, 3.00)  
C: (3.00, 2.00)

sol  
det  
ans.

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{x^2}{y}$

10:05 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 29]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Exercise**

Find the area of the triangle whose vertices are (1, 1), (2, 4) and (8, 1)

A: (1, 1)  
B: (2, 4)  
C: (8, 1)

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{1}{3}$

10:05  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 30]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

**Solving a System of Equations using Matrix Inverse**

**Example**

$$A \times X = B$$

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 11 \\ -5 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \quad I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 11 \\ -5 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 11 \\ -5 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

The solution set is  $\{(2, 6)\}$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{1}{3}$

10:06  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 31]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิถีไข

**A system of Equation with a unique solution**

From matrix equation  $AX = B$

where  $A$  is the *coefficient matrix* of the system, and  $X$  and  $B$  are column matrices.

If  $A$  is an invertible matrix, the solution of the system of linear equations can be represented by

$$X = A^{-1} B$$

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{1}{3}$

10:07 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 32]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิถีไข

Solve the following system of linear equations using Matrix Inverse

$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11 \\ 2x - 3y + 2z &= 9 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

The solution set is  $\{(2, -3, -2)\}$

ans

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U  $\frac{1}{3}$

10:07 20/9/2566



The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 33]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Solve the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 10 \\ y + 3z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ y + 3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & A & X & B \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[A | B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Augmented matrix เมทริกซ์แต่งเติม

B I U

10:08 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 34]

เพิ่ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

Solve the following system of linear equations.

$$\begin{aligned} 4x + y - 3z &= 11 \\ 2x - 3y + 2z &= 9 \\ x + y + z &= -3 \end{aligned}$$

$$[A | B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 + \frac{4}{5}R_2 \\ R_1 \rightarrow \frac{1}{7}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{-5}R_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix} = [C | D]$$

From [C | D]:  $x = 2, y = -3$  and  $x + y + z = -3 \Rightarrow z = -3 - 2 + 3 = -2$

B I U

10:09 20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 35]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

## Triangular Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (Row Echelon Matrix)**

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U

10:09  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - Gauss]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

## การกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian Elimination)

- ขั้นที่1 มีระบบสมการเชิงเส้น
- ขั้นที่2 ทำให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเต็ม(augmented matrix)
- ขั้นที่3 ทำให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว(Row Echelon Matrix)  
โดยใช้การ ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว(Elementary Row Operation)
- ขั้นที่4 เปลี่ยนกลับเป็นระบบสมการเชิงเส้น และแก้ระบบสมการเพื่อหาผลเฉลย

**วิธีนี้ได้รับการตั้งชื่อตาม Carl Friedrich Gauss (1777–1855)**


BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G123 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U

10:10  
20/9/2566

The Geometer's Sketchpad - [Week12 Gaussian - 37]

แฟ้ม แก๊ซ แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

 **Elementary Row Operation**  
ดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว

1. สลับแถวที่  $i$  กับแถวที่  $j$  (เขียนแทนด้วย  $R_i \leftrightarrow R_j$ )
2. คูณแถวที่  $i$  ด้วยค่าคงตัว  $c$ ;  $c \neq 0$  (เขียนแทนด้วย  $c R_i$ )
3. เปลี่ยนแถวที่  $i$  โดยนำค่าคงตัว  $c$  คูณกับแถวที่  $j$  แล้วบวกกับแถวที่  $i$  (เขียนแทนด้วย  $R_i + c R_j$ )
4. กระบวนการจะสิ้นสุดเมื่อเราได้เมทริกซ์ในรูปแบบ

Row Echelon Matrix หรือ Triangular Matrix

BMA | BMA | Lec | system | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | G1 | G2 | G3 | G1.23 | 17 | 18 | Cramer | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | Area Tri | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | Gauss | 37 | break time | matrix tool | 40 |

B I U

10:10 20/9/2566