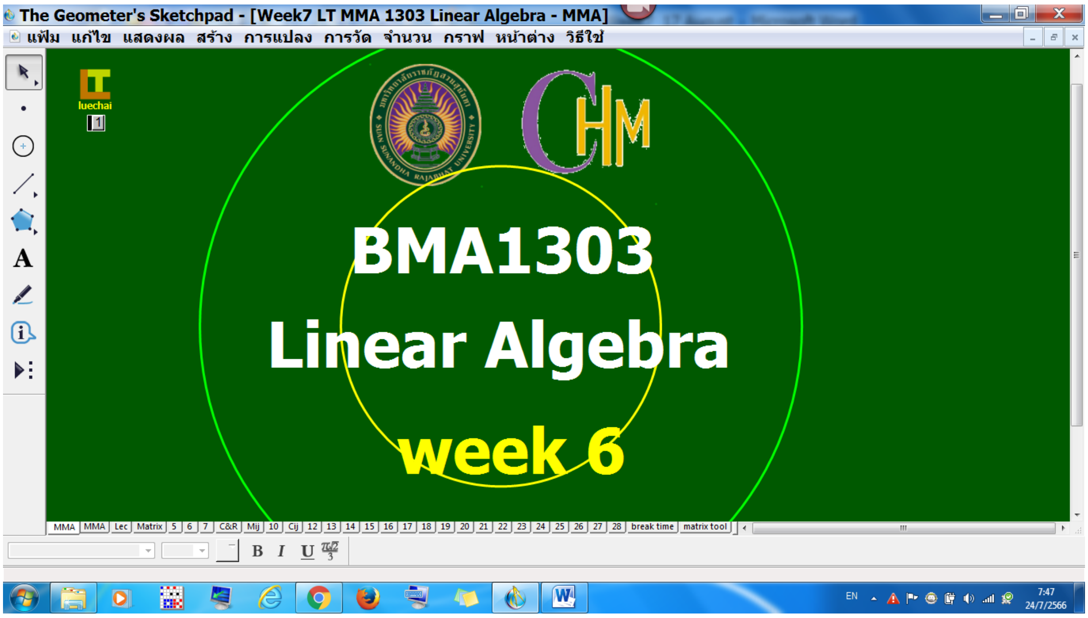
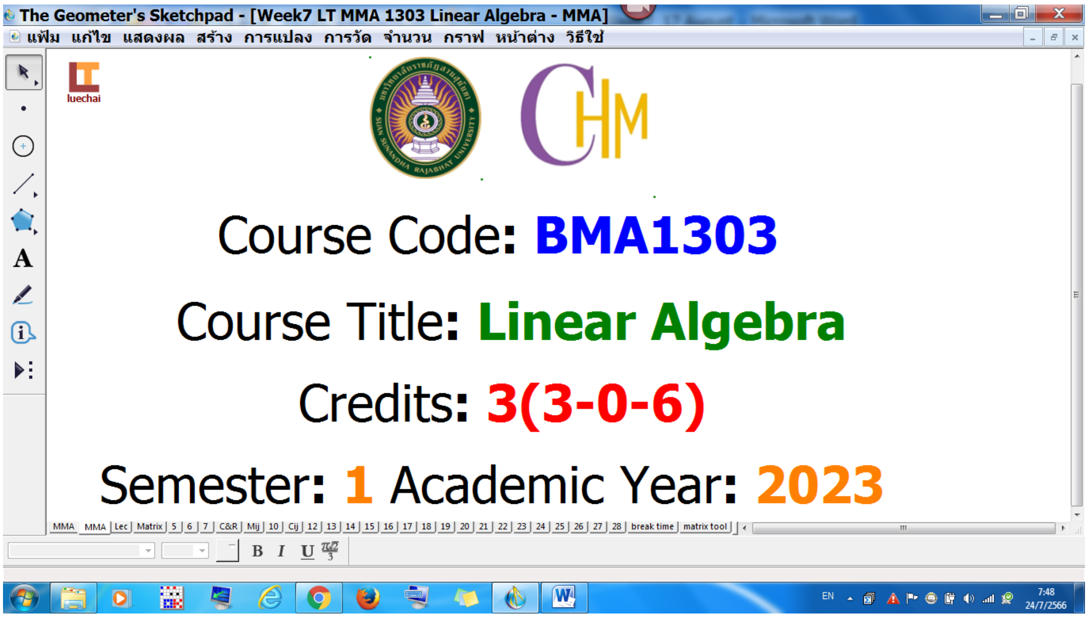
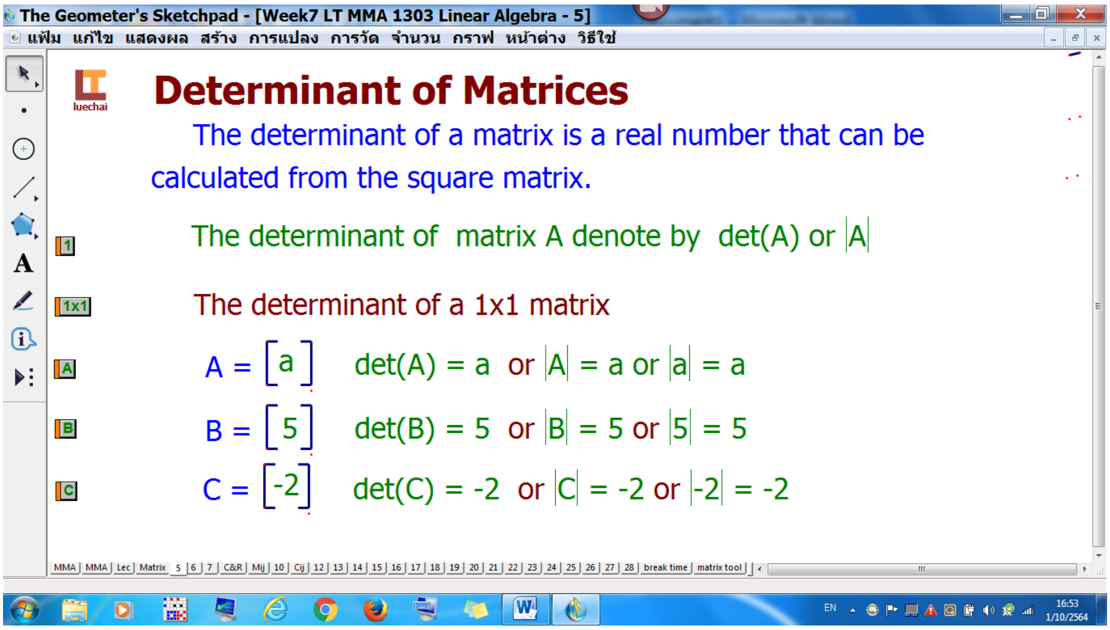
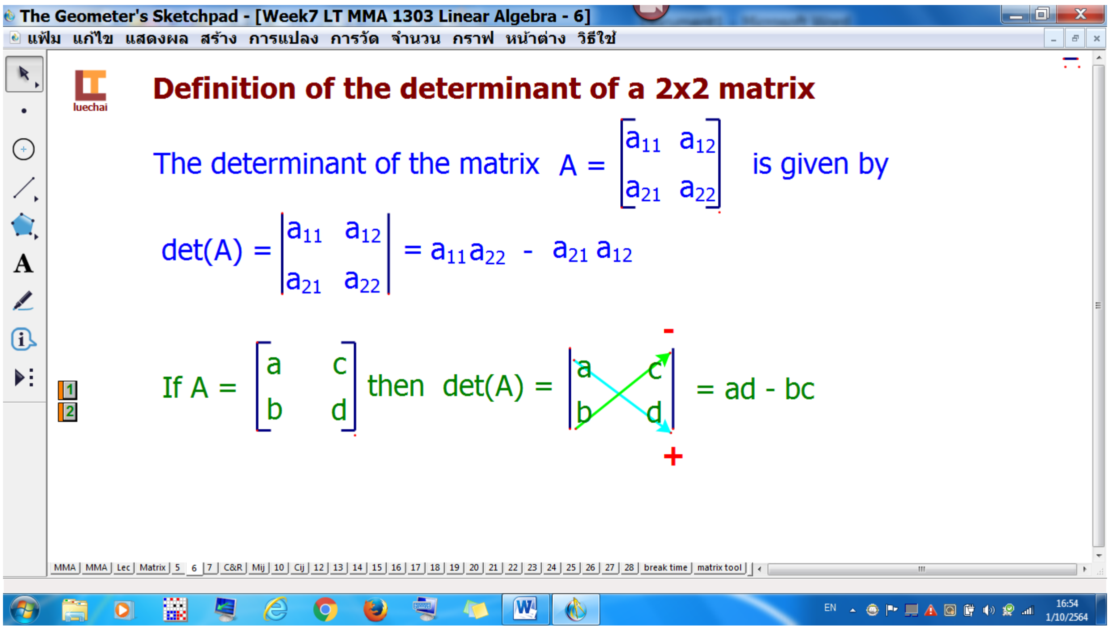
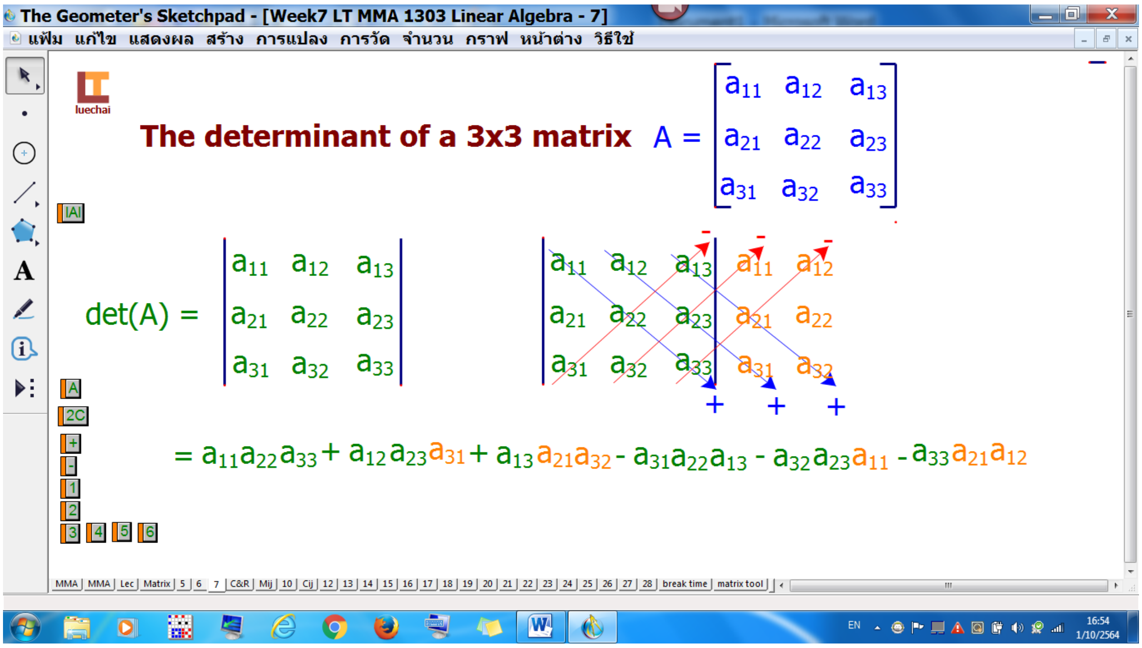
Week6 August 17, 2023

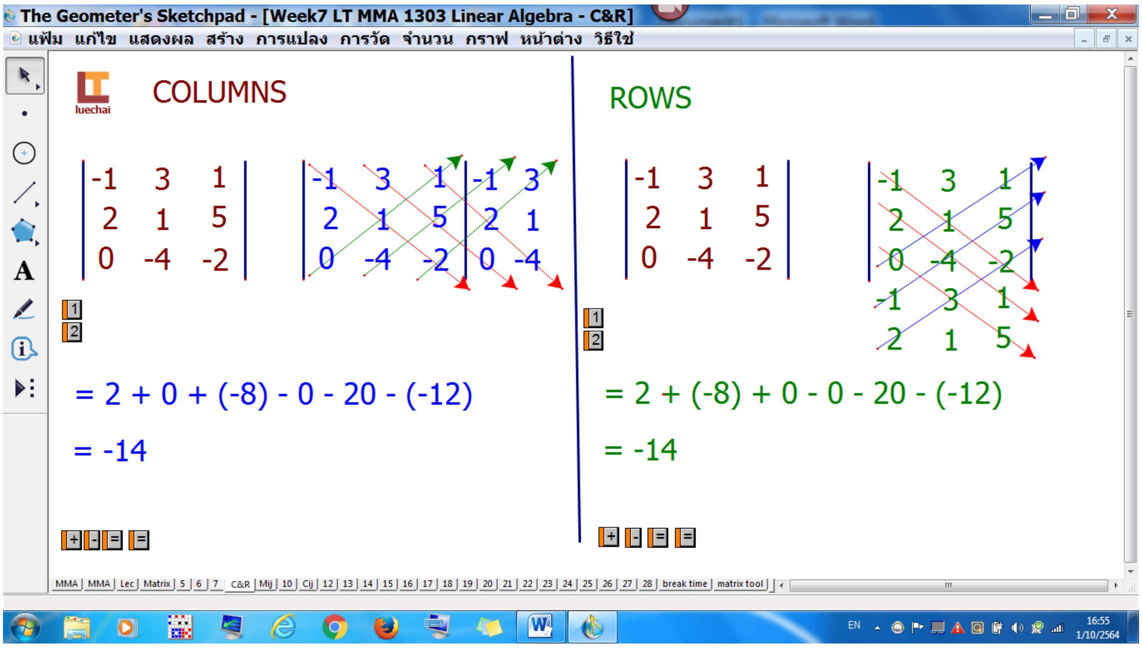





The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 5]
Determinant of Matrices
The determinant of a matrix is a real number that can be calculated from the square matrix.
The determinant of matrix A denote by det(A) or |A|
The determinant of a 1x1 matrix
$A = [a]$ det(A) = a or |A| = a or |a| = a
$B = [5]$ det(B) = 5 or |B| = 5 or |5| = 5
$C = [-2]$ det(C) = -2 or |C| = -2 or |-2| = -2


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 6]
Definition of the determinant of a 2x2 matrix
The determinant of the matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ is given by
$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
If $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ then $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ = ad - bc
-
+


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 7]
แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้
luechai
The determinant of a 3x3 matrix
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - C&R]
แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้
luechai
COLUMNS
$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$
= 2 + 0 + (-8) - 0 - 20 - (-12)
= -14
ROWS
$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$
= 2 + (-8) + 0 - 0 - 20 - (-12)
= -14

Determinants by Cofactor expansion

การหาตัวกำหนดโดยการกระจายโคแฟกเตอร์

Minor of a Matrix

บทนิยาม

ไมเนอร์ (minor)ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์ A ขนาด nxn ($n \geq 2$)
คือตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยของ A ซึ่งได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j

Minor of a_{ij} denote by M_{ij}

Cofactor of a Matrix

บทนิยาม

โคแฟกเตอร์ (cofactor) ของสมาชิก a_{ij} ของเมทริกซ์ A ขนาด nxn ($n \geq 2$)

คือผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และไมเนอร์ของ a_{ij}

เขียนแทนด้วย $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 10]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

From $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-8) = 6$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (6) = 6$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 (2) = -2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$M_{12} = -4$ $C_{12} = 4$

$M_{13} = -4$ $C_{13} = -4$

$M_{21} = -4$ $C_{21} = 4$

$M_{22} = 2$ $C_{22} = 2$

$M_{31} = 11$ $C_{31} = 11$

$M_{32} = -6$ $C_{32} = 6$

$M_{33} = -7$ $C_{33} = -7$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 12]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

Determinants by Cofactor expansion

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad C_{ij} = \pm M_{ij} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

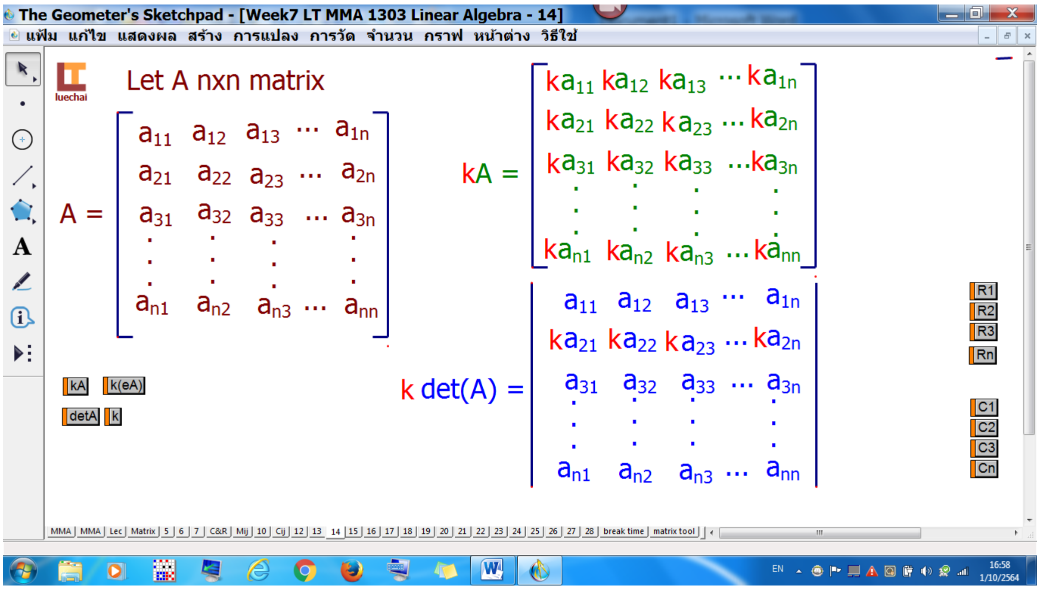
or $= a_{11}M_{11} + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}M_{13}$

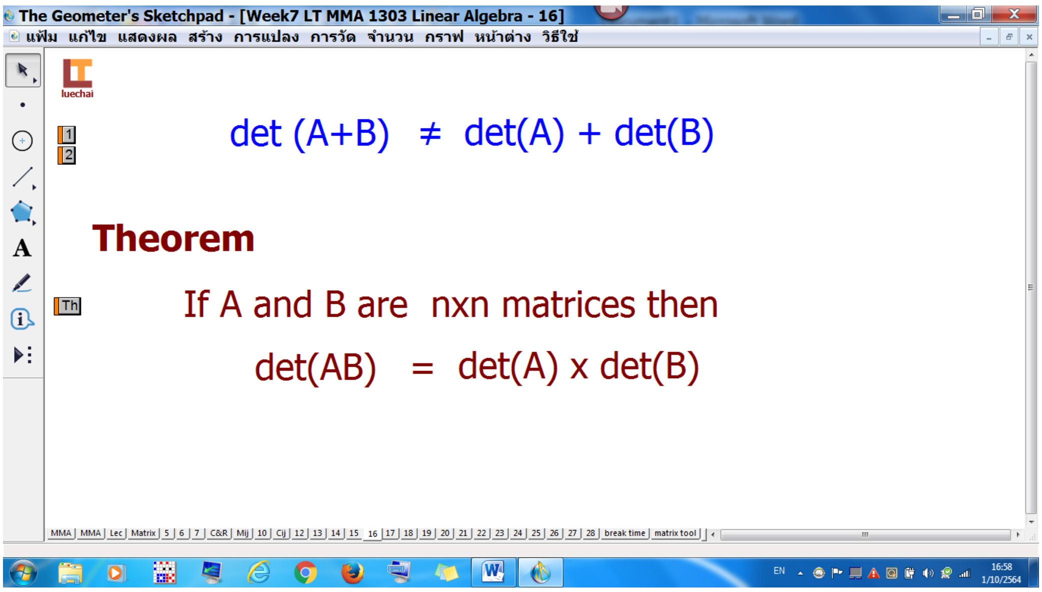
$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$= (-3)x(-5-3)$

$= (-3)(-8)$

$= 24$


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 14]
แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้
luechai
Let A nxn matrix
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$
$k\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
kA
k(eA)
detA
k
R1
R2
R3
Rn
C1
C2
C3
Cn


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 16]
แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้
luechai
1
2
det (A+B) ≠ det(A) + det(B)
Theorem
Th
If A and B are nxn matrices then
det(AB) = det(A) x det(B)

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 17]

Example find
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solution

To modify rows to have more zeroes.

$$\xrightarrow{C_4+2C_2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-16)$$

$$= 16$$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 18]

Example

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_4,\ R_2-3R_4,\ R_3-4R_4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \\ 0 & -6 & -9 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \\ -6 & -9 & -4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{4+1}(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-27) = -27$$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 19]

Cofactor matrix เมทริกซ์โคแฟกเตอร์

บทนิยาม

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ ของ A

เขียนแทนด้วย cof(A) คือ เมทริกซ์ขนาด nxn ซึ่งสมาชิก

ของเมทริกซ์ ในแถวที่ i และหลักที่ j คือ C_{ij}

และสมาชิกของ C_{ij} คือ โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ใน A

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 21]

Adjoint matrix เมทริกซ์ผูกพัน

บทนิยาม

เมทริกซ์ผูกพัน(Adjoint matrix) ของ A เขียนแทนด้วย adj(A)

ขนาด nxn ($n \geq 2$) คือ การสลับเปลี่ยน (transpose) ของ cof(A)

นั่นคือ $\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 20]

Cofactor matrix

From $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 11 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Adjoint matrix

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 11 & 6 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 11 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 22]

Inverse of a matrix ตัวผกผันของเมทริกซ์

A matrix is invertible if its determinant is not 0.

If A is an invertible matrix, then its inverse is A^{-1}

where

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 23]

แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

luechai

$$\text{From } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 11 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 11 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{11}{2} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & \frac{-7}{2} \end{bmatrix}$$

The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 24]

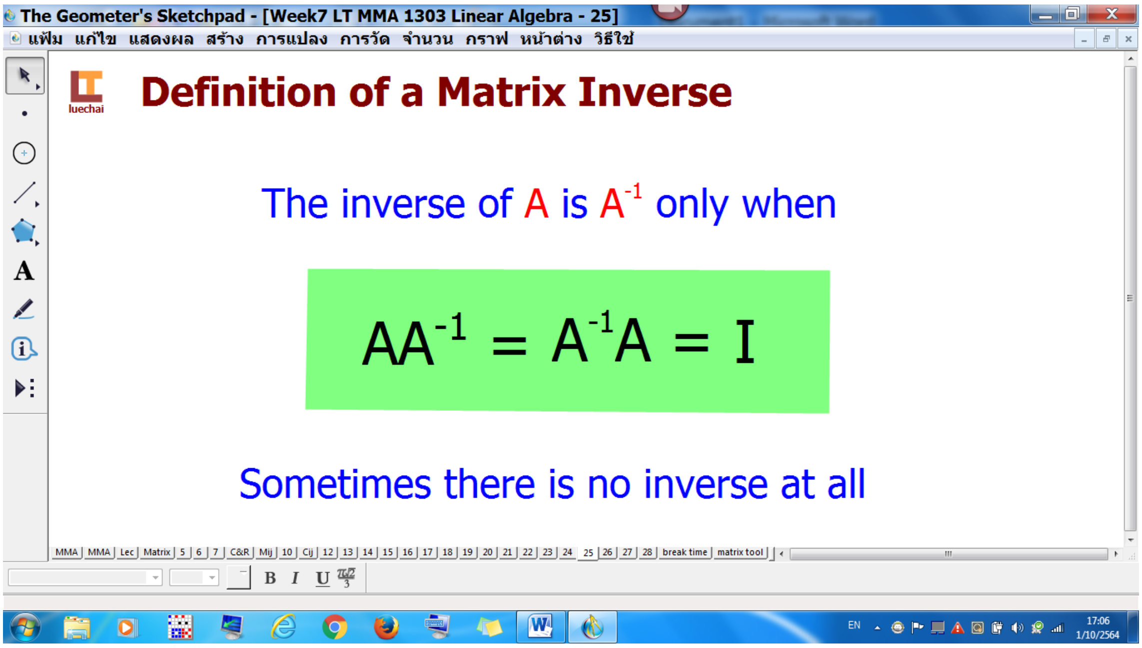
แฟ้ม แก้ไข แสดงผล สร้าง การแปลง การวัด จำนวน กราฟ หน้าต่าง วิธีใช้

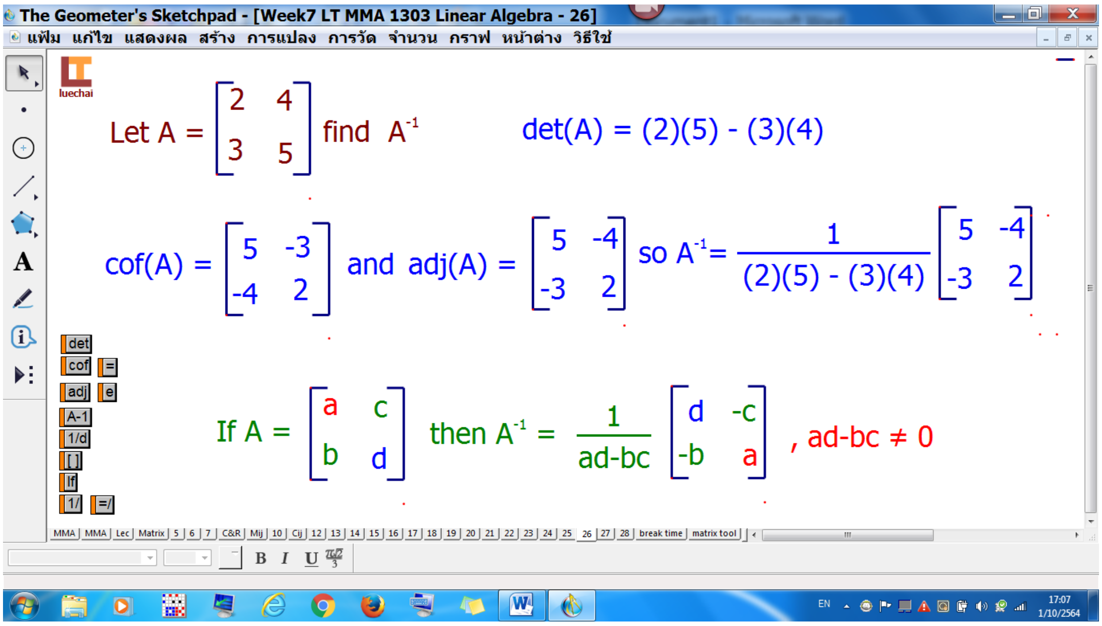
luechai

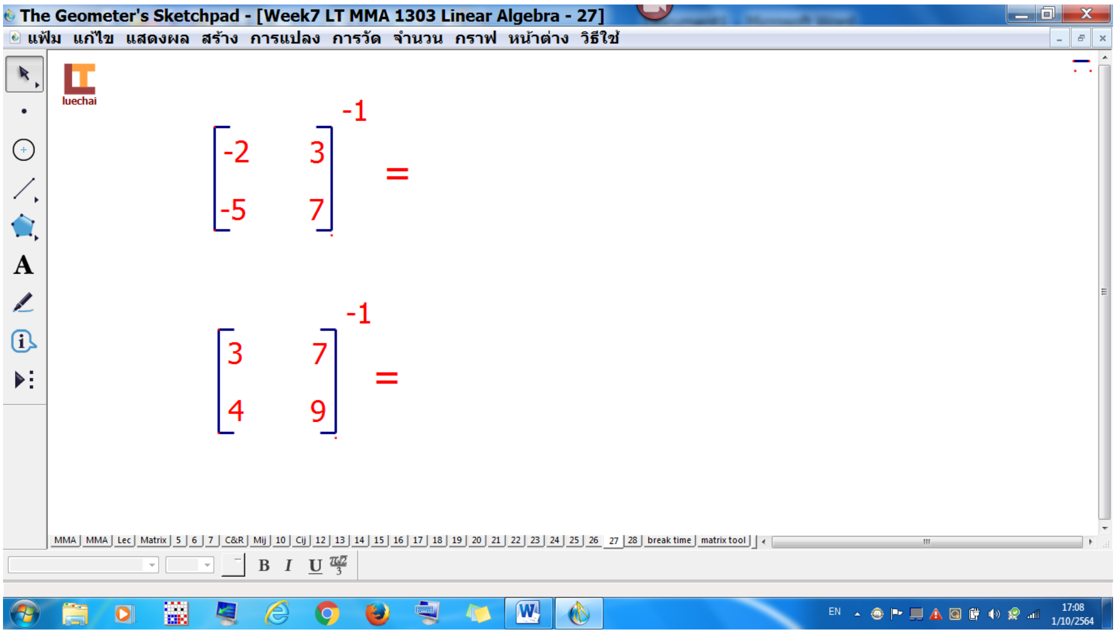
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{11}{2} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & \frac{-7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

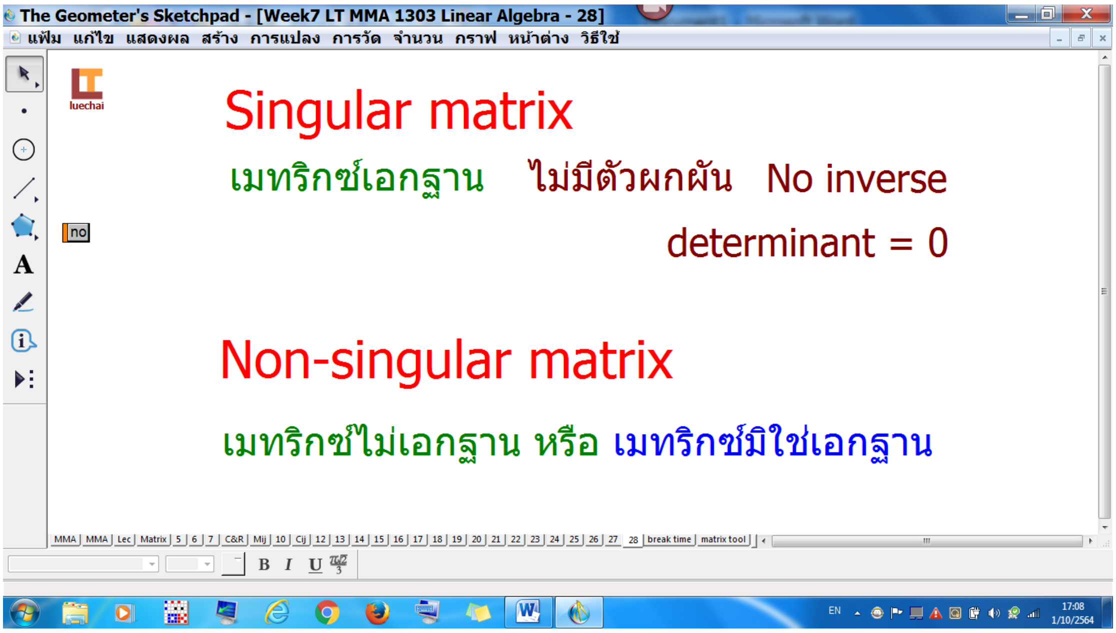
$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{11}{2} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & \frac{-7}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 25]
Definition of a Matrix Inverse
The inverse of A is A^{-1} only when
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Sometimes there is no inverse at all


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 26]
Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ find A^{-1}
det(A) = (2)(5) - (3)(4)
$\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ and $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ so $A^{-1} = \frac{1}{(2)(5) - (3)(4)} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
If $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ then $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$, $ad-bc \neq 0$


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 27]
luechai
$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} =$
$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} =$


The Geometer's Sketchpad - [Week7 LT MMA 1303 Linear Algebra - 28]
luechai
Singular matrix
เมทริกซ์เอกฐาน ไม่มีตัวผกผัน No inverse
determinant = 0
no
Non-singular matrix
เมทริกซ์ไม่เอกฐาน หรือ เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน