



## เทคนิคสำหรับการหาร (Vedic Method for Division )

วิธีการหารของเทคนิคมีทั้งหมด 7 วิธีดังนี้

1. การหารตรงหรือการหารธง (Straight Division or Flag Division)  
หรือการหารด้วยอุปสูตรชาวากะ  
( उपसूत्र १४. ध्वजंक = Upasūtra 14. dhvajāṅka- On the flag.)  
เป็นการหารแบบทั่วไปด้วยการใช้สูตรแนวตั้งและแนวไขว้
2. การหารด้วยสูตรนิหิลัม  
( सूत्र २. निखिलं नवतश्चरमं दशतः = Sutra 2. Nikhilam Navathaścaramam Dhaśataḥ )  
เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ
3. การหารด้วยสูตรปราวรรตย์ โยชเขต  
( सूत्र ४. परवर्त्य योजयेत् = Sutra 4. Parāvartya Yojayet)  
เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ
4. การหารด้วยสูตรสัดส่วนช่วย  
หรือการหารด้วยสูตรอนุรูปเยณะ  
( उपसूत्र १. आनु रूप्येण = Upasutra 1. Ānurūpyeṇa)  
เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ
5. การหารด้วยขบวนการวินคิวลัม  
( र्खाकोष्क विभाजन की प्रक्रिया = Vinculum Process of Division)  
เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ
6. การหารด้วยสูตรเศษส่วนช่วย หรือการหารด้วยสูตรเอกาธิเกนปุรเวณ  
( सूत्र १४. एक्युनेन पूर्वेण = Sutra 14. Ekanyūnena Pūrveṇa)  
เป็นการหารแบบเทคนิคเฉพาะ
7. การหารด้วยอุปสูตรเวชฏันัม  
( उपसूत्र ५. वेष्टनम् = Upasutra 5. Veṣṭanam)  
เป็นการหารแบบทั่วไป

## 5.1 การหารตรงหรือการหารธง (Straight Division or Flag Division)

ท่านครูศรี ภารตี กฤษณะ ตีรณะ ( Sri Bharati Krishna Tirthaji พ.ศ. 2427-2503) กล่าวยกย่องวิธีการหารตรงหรือการหารธงนี้ว่าเป็น “อัญมณีอันล้ำค่าของเวทคณิต (Crowning Gem of Vedic Mathematics)”

เนื่องจากการหารที่ควรวรรณสูตรเวทคณิต 2 สูตร คือ การคูณด้วยแนวตั้งและแนวไขว้หรือสูตรอุรหะ ตีรยัคภยาม (Urdhva Tiryagbhyām mean Vertically and crosswise) กับ อุปสูตรที่ 14 ขวาซางกะ (Upasūtra 14. dhvajāṅka - On the flag.) เป็นการหารแบบรูปทั่วไปของเวทคณิตที่ใช้พื้นที่ในการคำนวณน้อยมากคือเป็นการหารเพียงบรรทัดเดียวได้และสามารถดำเนินการหารที่ตัวตั้งและตัวหารที่มีค่ามาก ๆ ได้ทุกจำนวนจึงควรที่จะศึกษาอย่างยิ่ง

รูปแบบทั่วไปของการหารของเวทคณิต (Vedic Mathematics Division Algorithm) ที่ใช้บรรทัดเดียวดำเนินการหารได้รวดเร็วและประหยัดพื้นที่ จึงมีขั้นตอนการหาร ดังต่อไปนี้

### หมายเหตุ

คำว่า “ธง” มาจากภาษาสันสกฤต ธฺวช น. ‘ธฺวช’ หมายถึง ธง เสาธง สดมภ์ (a flag or banner, a mark, a sign or symbol)

### 5.1.1 ในกรณี ตัวหารเป็นจำนวนเต็ม 1 หลัก

การหารในกรณีนี้ตัวหารเป็นจำนวนเต็มหลัก 1 หลัก วิธีการหารคล้ายกับวิธีการสั้นแบบดั้งเดิม ต่างกันที่มีการขีดเส้นกั้นถัดจากตัวตั้ง เพื่อแบ่งผลหารของคำตอบเป็นสองส่วน คือ ส่วนทศนิยมเป็นจำนวนเต็มส่วนทศนิยมเป็นเศษเหลือหรือทศนิยม การหารตัวเลขของตัวตั้งที่หารได้แต่ละครั้ง เศษเหลือจะนำไปเขียนไว้หน้าตัวเลขถัดไปเพื่อเป็นตัวตั้งสุทธิ (Net Dividend = ND) ในการหารต่อ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ดังแสดงวิธีทำตามตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** หาผลหารของ  $671 \div 4$

**วิธีทำ** รูปแบบของ  $671 \div 4$  เขียนตัวหารและตัวตั้งกันด้วยวงเล็บให้อยู่บนแถวเดียวกัน และเขียนเส้นขีดเส้นกั้นถัดไปทางขวาของตัวตั้ง เพื่อแบ่งผลลัพธ์ของคำตอบเป็นสองส่วน คือ ส่วนที่ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มและส่วนที่ผลลัพธ์เป็นเศษเหลือหรือทศนิยม (หลังใส่เลขศูนย์ที่ตัวก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับต้องการผลหารทศนิยมกี่ตำแหน่ง) ดังแสดงแผนภาพการหารข้างล่างนี้

$$\begin{array}{r}
 \text{เส้นกั้น} \\
 671 \div 4 \rightarrow 4 \overline{) 671 \mid 000} \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 \text{ผลลัพธ์} \quad \text{เศษเหลือ}
 \end{array}$$

**หมายเหตุ** ให้เว้นช่องว่างระหว่างตัวเลขของตัวตั้ง ไว้พอสมควรสำหรับใส่เศษเหลือจากการหาร เมื่อดำเนินการหารตัวตั้งตัวแรกแล้วนำเศษเหลือไปเขียนห้อยไว้หน้าตัวเลขถัดไปของตัวตั้ง ก็จะได้เป็นตัวตั้งสุทธิของแต่ละขั้นตอนการหารต่อไปจนถึงตัวสุดท้าย ซึ่งจะเวียนเกิดเป็นตัวตั้งสุทธิถัดไปเช่นนี้เรื่อย ๆ

ดังนั้นขั้นตอนการหารเป็นดังนี้

$$\begin{array}{r} \text{ขั้นที่ 1} \quad 671 \div 4 \quad \rightarrow 4) \begin{array}{r|rrr} 6 & 27 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & & \end{array} \end{array}$$

$6 \div 4 = 1$  เหลือเศษ 2 เขียนผลลัพธ์ 1 เป็นตัวแรกของคำตอบ ข้างล่างตรงตัวแรกของตัวตั้ง (6)

ส่วนเศษเหลือ 2 เขียนห้อยข้างหน้าของเลข 7 ก็จะได้ 27 เป็นตัวตั้งสุทธิถัดไปของการหาร

$$\begin{array}{r} \text{ขั้นที่ 2} \quad 671 \div 4 \quad \rightarrow 4) \begin{array}{r|rrr} 6 & 27 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 6 & & & & \end{array} \end{array}$$

$27 \div 4 = 6$  เหลือเศษ 3 เขียนผลลัพธ์ 6 เป็นตัวที่สองของคำตอบ ข้างล่างตรงตัวที่สองของตัวตั้ง (27)

ส่วนเศษเหลือ 3 เขียนห้อยข้างหน้าของเลข 1 ได้เป็นตัวตั้งสุทธิ 31 สำหรับการหารถัดไป

$$\begin{array}{r} \text{ขั้นที่ 3} \quad 671 \div 4 \quad \rightarrow 4) \begin{array}{r|rrr} 6 & 27 & 31 & 30 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 7 & & & \end{array} \end{array}$$

$31 \div 4 = 7$  เหลือเศษ 3 เขียนผลลัพธ์ 7 เป็นตัวที่สามของคำตอบ ข้างล่างตรงตัวที่สามของตั้ง (31)

ส่วนเศษเหลือ 3 เขียนห้อยข้างหน้าของ 0

แต่ การหาร ได้ผลลัพธ์ผ่านเส้นคั่นที่แบ่งส่วนคำตอบกับส่วนที่เป็นเศษเหลือหรือทศนิยม

แสดงว่า ถ้าต้องการเศษเหลือ การหารก็ต้องสิ้นสุด ได้คำตอบเป็นจำนวนเต็ม 167 เศษเหลือ 3

$$\text{ตอบ } 671 \div 4 = 167 \frac{3}{4}$$

แต่ ถ้าต้องการหาคำตอบในรูปทศนิยมก็ดำเนินการหารต่อ เช่นเดียวกับข้างต้น เมื่อเขียนเศษ 3 ห้อยข้างหน้า 0

นั่นคือ 30 จะเป็นตัวตั้งสุทธิในการหารถัดไปจะเป็นผลลัพธ์ทศนิยม ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} \text{ขั้นที่ 4} \quad 671 \div 4 \quad \rightarrow 4) \begin{array}{r|rrr} 6 & 27 & 31 & 30 & 20 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 7 & 7 & & \end{array} \end{array}$$

$30 \div 4 = 7$  เหลือเศษ 2 เขียน 2 ห้อยข้างหน้า 0 ตัวถัดไปเป็นตัวตั้ง 20

$$\begin{array}{r} \text{ขั้นที่ 5} \quad 671 \div 4 \quad \rightarrow 4) \begin{array}{r|rrr} 6 & 27 & 31 & 30 & 20 & 00 \\ \hline 1 & 6 & 7 & 7 & 5 & \end{array} \end{array}$$

$20 \div 4 = 5$  เหลือเศษ 0 เขียน 0 ห้อยข้างหน้า 0 ตัวถัดไปเป็นตัวตั้ง 00 แสดงว่าเกิดการหารลงตัว

เป็นอันสิ้นสุดการหาร

$$\text{ตอบ } 671 \div 4 = 167.75$$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลหารของจำนวนต่อไปนี้

$$1) 294 \div 3 \rightarrow 3 \overline{) 294} \begin{array}{r} 000 \\ 098 \end{array}$$

ตอบ 98

$$2) 925 \div 8 \rightarrow 8 \overline{) 925} \begin{array}{r} 115 \\ 625 \end{array}$$

ตอบ 115.625

$$3) 3689 \div 7 \rightarrow 7 \overline{) 3689} \begin{array}{r} 0527 \\ 0527 \end{array}$$

ตอบ 527

แบบฝึกหัดชุดที่ 1 ให้ตอบเศษเหลือและทศนิยมสามตำแหน่ง

1.  $3 \overline{) 327}$

2.  $4 \overline{) 3134}$

3.  $6 \overline{) 5321}$

4.  $7 \overline{) 6821}$

5.  $4 \overline{) 23657}$

6.  $8 \overline{) 5732}$

7.  $5 \overline{) 5744}$

8.  $2 \overline{) 78579}$

9.  $4 \overline{) 48436}$

10.  $9 \overline{) 98979}$

11.  $5 \overline{) 79758}$

12.  $11 \overline{) 4376}$

13.  $8 \overline{) 59784634}$

14.  $4 \overline{) 89657923}$

15.  $5 \overline{) 949568932165}$

16.  $6 \overline{) 6969696969696969}$

17.  $3 \overline{) 3456789345678}$

### การหารตรงหรือการหารยกธง (Straight Division or Flag Division)



ในเวทคณิตเป็นการหารด้วยอุปสูตรที่ 14 ชาวซางกะ  
(उपसूत्र १४. ध्वजंक = Upasūtra 14. Dhvajāṅka- On the flag)  
Dhvaja m. ธิวช น. ธง เส้าธง

อุปสูตรนี้ใช้สำหรับการหาร ( $x \div y$ ) ของสองจำนวน บางครั้งก็เรียกว่าการหารตรง เพราะว่า ด้วยการฝึกฝน บางอย่างผู้ฝึกฝนวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตสามารถเข้าถึง 'ตรง' ไปยังตัวเลขที่คำนวณได้ โดยไม่ต้องมีขั้นตอนกลางใด ๆ (ซึ่งหมายความว่าขั้นตอนกลางจะถูกดำเนินการคิดเลขในใจได้)

<https://kosha.sanskrit.today/word/en/dhvaja/th>

### 5.1.2 ในกรณี ตัวหารเป็นจำนวนเต็ม 2

กรณีที่ตัวหารเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 หลักขึ้นไปนั้น วิธีการหารแบบดั้งเดิมก็คือต้องท่องสูตรคูณเกินแม่เก้าขึ้นไปใช้สำหรับการหารนั้น ๆ แต่สำหรับการหารตรงแบบเวทคณิตเป็นการหารที่ใช้ตัวหารเพียงตัวเลขตัวเดียวหรืออย่างมากก็สองตัวในจำนวนตัวเลขทั้งหมดของตัวหารนั้น ๆ

กล่าวคือตัวหารได้ถูกแบ่งเป็นสองส่วน

- ส่วนแรกมักจะใช้ตัวเลขตัวหน้าเพียงตัวของตัวหาร เป็นตัวดำเนินการหารจริง เรียกว่า “ตัวหารหลัก ( Main Divisor)” นี่ก็คือความเป็นเอกลักษณ์ในการหารด้วยวิธีเวทคณิต
  - ส่วนที่ 2 เป็นส่วนที่ใช้คู่กับผลลัพธ์ของการหารที่ได้มาก่อนหน้านั้นด้วยวิธีการคูณแนวตั้งและแนวไขว้แล้วนำไปลบตัวตั้งขั้นต้น (Gross Dividend = GD) เพื่อให้ได้ตัวตั้งสุทธิ (Net Dividend = ND) สำหรับการหารของตัวหารจริงหรือตัวหารหลัก ให้ได้ผลหารในหลักในถัดไป
- ตัวเลขส่วนที่ 2 นี้ จะถูกเขียนยกขึ้นไปไว้เหนือตัวเลขส่วนแรกเช่นเดียวกับวิธีการเขียนเลขยกกำลังของเลขชี้กำลัง จึงถูกเรียกว่า “ตัวเลขยกธงหรือตัวเลขธง (Flag digit)” และบางครั้งจะเรียกการหารนี้ว่า “การหารตรงด้วยวิธียกธง (Straight Division by Flag Method )”

ตัวตั้งก็ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเช่นเดียวกัน

โดยใช้เส้นคั่นแบ่งส่วนทางซ้ายและทางขวา ส่วนทางขวาของตัวตั้งจะต้องให้มีจำนวนของตัวเลขเท่ากับจำนวนตัวเลขบนธง

วิธีการหารยกธงมีขั้นตอนดังนี้

สมมุติ ถ้าให้ตัวตั้งคือ x y z p q r ถูกหารด้วย a b c แล้วแสดงวิธีการเขียนการหารเป็นดังนี้

1. ตัวหาร แบ่งตัวหาร abc ออกเป็น a และ bc

เรียก a ว่าตัวหารหลัก ( Main Divisor)

เรียก bc ว่าตัวเลขธงหรือธวาซากะในภาษาสันสกฤต (Flag digit or Dhvajanka ) นำไปเขียนไว้

ส่วนบนตัวเลขของส่วนแรกลักษณะคล้ายกับเลขชี้กำลัง เพื่อไม่ให้สับสนกับเรื่องเลขยกกำลังกับตัวเลขชี้กำลัง จึงเรียกตัวเลขนี้เสียใหม่ว่า “ตัวเลขยกธงหรือตัวเลขบนธง (on the flag)”

2. ตัวตั้ง ก็ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเช่นกัน โดยใช้เส้นคั่นนี้จะแบ่งส่วนทางขวาของตัวตั้งให้มีจำนวนของตัวเลขเท่ากับจำนวนตัวเลขบนธง

แสดงวิธีเขียนการหารได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} a^{bc} & x \ y \ z \ p \ | \ q \ r \\ \hline & \text{ผลลัพธ์} \quad | \quad \text{เศษเหลือ} \end{array}$$

○ =สองส่วนนี้ต้องมีจำนวนตัวเลขเท่ากัน

### 3. การดำเนินการนั้น

3.1 เมื่อตัวแรกของตัวตั้งถูกหารด้วยตัวหารหลักได้แล้ว ให้เขียนคำตอบในช่องผลลัพธ์ตรงกับข้างล่างของตัวตั้งส่วนนั้น และส่วนที่เป็นเศษเหลือให้นำไปเขียนห้อยไว้หน้าตัวเลขถัดไปของตัวตั้งจะได้เป็นตัวตั้งเรียกว่าตัวตั้งขั้นต้น (Gross Dividend = GD)

3.2 หาผลคูณตัวเลขตัวแรกของตัวเลขบนตรงกับคำตอบตัวแรกของการหาร แล้วนำไปลบตัวตั้งขั้นต้นในขั้นที่ 3.1 ผลลัพธ์ที่ได้นี้เรียกว่าตัวตั้งสุทธิ (Net Dividend = ND) ซึ่งจะต้องเป็นจำนวนบวก ถ้าเป็นจำนวนลบจะต้องปรับลดค่าคำตอบลงจนได้ตัวตั้งสุทธิเป็นจำนวนบวก แล้วจึงจะดำเนินการหารขั้นต่อไปได้

3.3 ขบวนการหารที่ได้ ตัวตั้งขั้นต้น (GD) และตัวตั้งสุทธิ (ND) จะถูกดำเนินการซ้ำ ๆ ไปเช่นนี้เรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

**ปัญหาหลักในเรื่องการหารตรงนี้** คือการลบตัวตั้งขั้นต้นด้วยผลคูณของตัวเลขตรงและผลลัพธ์ของคำตอบที่ได้มาก่อนแล้ว ตัวตั้งสุทธินั้น เราควรพิจารณาขั้นตอนต่อไปนี้จะช่วยให้เข้าใจการหารตรงแบบเวทคณิตดีขึ้น

**เมื่อตัวเลขตรงมีตัวเลขตัวเดียว** การลบตัวตั้งขั้นต้นในแต่ละขั้นตอนด้วยผลคูณของผลลัพธ์คำตอบสุดท้ายกับจำนวนตรงของขั้นต่อนั้น ๆ จะได้ตัวตั้งสุทธิเป็นตัวตั้งในการหารได้เลย

**เมื่อจำนวนตรงมีตัวเลขสองตัว**

- ขั้นที่ 1 ของการหาร ใช้ตัวหารหลัก (Main Divisor) หารตัวตั้งตัวแรกได้ผลลัพธ์และเศษเหลือแล้วนำเศษเหลือที่ได้ไปเขียนห้อยไว้ที่ตัวเลขที่ 2 ของตัวตั้งถัดไปได้ตัวตั้งขั้นต้น แล้วหาผลคูณตัวแรกของตัวเลขตรงกับตัวแรกของคำตอบที่ได้มานั้น แล้วนำไปลบตัวตั้งขั้นต้นได้เป็นตัวตั้งสุทธิ ในการหารขั้นต่อไป
- ขั้นที่ 2 หารตัวตั้งสุทธิของขั้นที่ 1 ด้วยตัวหารหลัก ได้ผลลัพธ์และเศษเหลือ นำเศษเหลือที่ได้ไปเขียนห้อยไว้หน้าตัวเลขที่ 3 ของตัวตั้งถัดไป ได้ตัวตั้งขั้นต้น หาผลคูณไขว้คู่ตัวเลขสองตัวของตัวเลขตรงกับสองตัวเลขของคำตอบที่ได้มาก่อนจากขั้นแรก แล้วนำไปเป็นตัวลบตัวตั้งขั้นต้นได้เป็นตัวตั้งสุทธิ เป็นตัวตั้งในการหารขั้นต่อไป เป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป

**เมื่อตัวเลขตรงมีสามตัวหรือสามหลัก**

- ขั้นที่ 1 ของการหาร หารตัวตั้งตัวแรกด้วยตัวหารหลัก ได้ผลลัพธ์และเศษเหลือ เศษเหลือที่ได้ นำไปเขียนห้อยไว้ที่ตัวเลขตัวตั้งตัวที่ 2 ถัดไป ได้เป็นตัวตั้งขั้นต้น แล้วหาผลคูณตัวแรกของตัวเลขตรงกับตัวแรกของคำตอบที่ได้มานั้น นำไปลบตัวตั้งขั้นต้น ได้เป็นตัวตั้งสุทธิ ใช้ในการหารขั้นต่อไป



- ขั้นที่ 2 หารตัวตั้งสุทธิในขั้นที่ 1 ด้วยตัวหารหลัก ได้ผลลัพธ์และเศษเหลือ เศษเหลือที่ได้นำไปเขียนห้อยไว้หน้าตัวเลขตัวตั้งตัวที่ 3 เป็นตัวตั้งขั้นต้น หาผลคูณไขว้คู่ของสองตัวแรกของตัวเลขตรงกับตัวเลขสองตัวของคำตอบที่มาก่อน นำไปลบตัวตั้งขั้นต้น ได้ตัวตั้งสุทธิ
- ขั้นที่ 3 หารตัวตั้งสุทธิในขั้นที่ 2 ด้วยตัวตั้งหลัก ได้ผลลัพธ์และเศษเหลือ เศษเหลือที่ได้นำไปเขียนห้อยไว้หน้าตัวเลขตัวตั้งตัวที่ 4 เป็นตัวตั้งขั้นต้น หาผลคูณแนวตรงและแนวไขว้ของสามตัวของตัวเลขตรงกับสามตัวของคำตอบสุดท้าย แล้วนำไปลบตัวตั้งขั้นต้น ให้ได้ตัวตั้งสุทธิ หลังจากขั้นที่สามนี้ถัดไปการลบจะเกิดจาก การหาผลคูณแนวตรงและแนวไขว้ของสามตัวของจำนวนตรงกับสามตัวของคำตอบสุดท้ายต่อเนื่องเรื่อย ๆ ไป

ตัวหารเป็นจำนวนเต็ม 2 หลัก

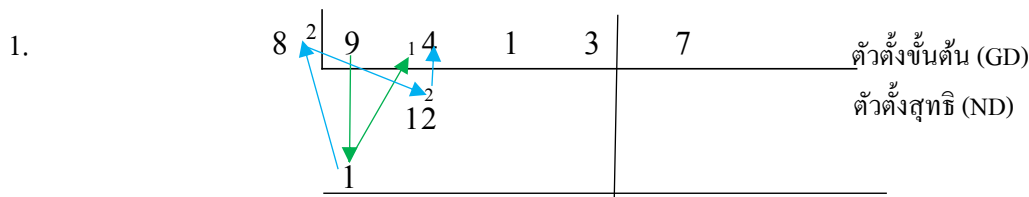
ตัวอย่างที่ 1 หาผลหารของ  $94137 \div 82$

ขั้นตอนการหารยกธง

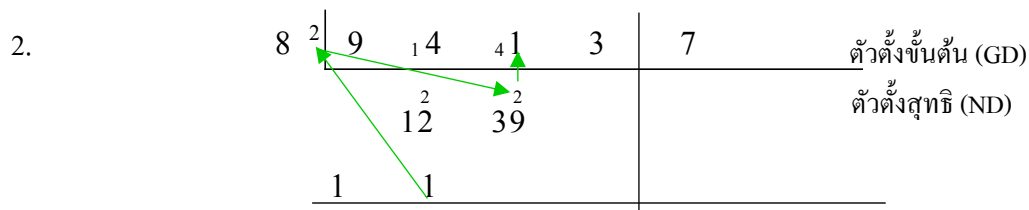
ตัวหาร คือ 82 เป็นเลข 2 หลัก แยกออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกจะเป็นตัวหารหลัก (Main Divisor) ซึ่งโดยทั่วไปมีเพียงตัวเดียว หรือสองตัวเป็นอย่างมากแล้วแต่สถานการณ์ ในที่นี้คือ 8 เป็นตัวหารหลัก และส่วนที่สองคือ 2 เรียกว่าตัวเลขธง เขียนยกไว้ข้างบนคล้ายเลขชี้กำลัง จึงเรียกว่าเลขบนธง (On the Flag)

ส่วนตัวตั้ง คือ 94137 ถูกแบ่งเป็นสองส่วน โดยส่วนทางซ้ายเป็นตัวตั้งจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็ม ส่วนทางขวาค้นด้วยเส้นแนวตั้ง ส่วนนี้จะได้ผลลัพธ์เป็นเศษเหลือหรือทศนิยม และส่วนที่สองของตัวตั้งนี้จะต้องมีจำนวนตัวเลขเท่ากับจำนวนตัวเลขบนธง ในที่นี้ ตัวตั้ง 9 4 1 3 | 7 ถูกแบ่งส่วนทางขวาให้มีตัวเลข 1 ตัว เท่ากับจำนวนตัวเลขบนธง 1 ตัวเช่นกัน

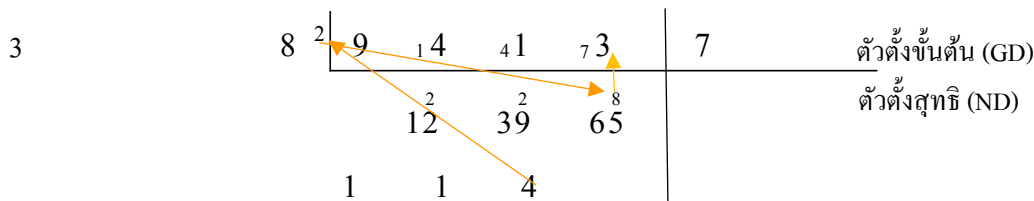
ขั้นตอนการหาร



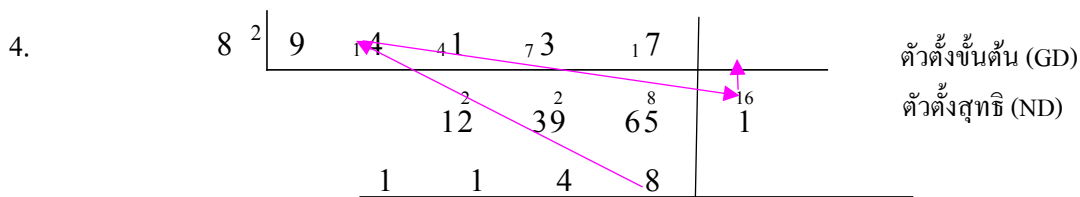
$9 \div 8 = 1$  เหลือเศษ 1 ใส่ผลลัพธ์ 1 เป็นตัวแรกของผลหาร ส่วนเศษเหลือ 1 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าตัวเลขถัดไปของตัวตั้ง คือ 4 ได้เป็น 14 เรียกว่าตัวตั้งขั้นต้น (Gross Dividend =GD) หาผลคูณตัวเลขธงคือ 2 กับคำตอบตัวแรก คือ 1 ได้  $2 \times 1 = 2$  แล้วนำไปลบออกตัวตั้งขั้นต้น (GD) คือ 14 ได้  $14 - 2 = 12$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (Net Dividend=ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งในการหารด้วยตัวหารหลักต่อไป



$12 \div 8 = 1$  เหลือเศษ 4 ใส่ผลลัพธ์ 1 เป็นตัวที่สองของผลหาร ส่วนเศษเหลือ 4 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 1 ได้ 41 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณตัวเลขตรง (2) กับคำตอบตัวที่สองคือ 1 ได้  $2 \times 1 = 2$  แล้วนำไปลบออกจาก 41 คือ  $41 - 2 = 39$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งที่ใช้ในการหารด้วยตัวหารหลักต่อไป



$39 \div 8 = 4$  เหลือเศษ 7 ใส่ผลลัพธ์ 4 เป็นตัวที่สามของผลหาร ส่วนเศษเหลือ 7 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 3 ได้ 73 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณตัวเลขตรง (2) กับคำตอบตัวที่สาม คือ 4 ได้  $2 \times 4 = 8$  แล้วนำไปลบออกจาก 73 คือ  $73 - 8 = 65$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งที่ใช้ในการหารด้วยตัวหารหลักต่อไป



$65 \div 8 = 8$  เหลือเศษ 1 ใส่ผลลัพธ์ 8 เป็นตัวที่สี่ของผลหาร ส่วนเศษเหลือ 1 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 7 ได้ 17 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณตัวเลขตรง (2) กับคำตอบตัวที่สี่หรือที่ได้มาก่อนหน้า คือ 8 ได้  $2 \times 8 = 16$  แล้วนำไปลบออกจาก 17 คือ  $17 - 16 = 1$

เนื่องจากสิ้นสุดการหารในกรณีนี้ได้คำตอบเป็น 1148 เศษเหลือ  $1 = r$  (Remainder=r)

ตอบ  $94137 \div 82 = 1148 \frac{1}{82}$

พิจารณาการหารวิธีดั้งเดิมกับการหารแบบตรง

วิธีดั้งเดิม  $82 \overline{) 94137}$

$$\begin{array}{r} 82 \\ 121 \\ \underline{82} \\ 393 \\ \underline{328} \\ 657 \\ \underline{656} \end{array}$$

$$8 \begin{array}{c} 2 \\ \left| \begin{array}{cccc} 9 & 14 & 41 & 73 \\ & 12 & 39 & 65 \\ & & 1 & 8 \end{array} \right. \end{array}$$

พิจารณา ตามแนวเส้นลูกศรของทั้งการหารดั้งเดิม  
กับการหารแบบตรงจะเห็นได้ชัดเจนว่า  
ตัวตั้งขั้นต้นคือตัวเดียวกัน  
สรุป ได้ว่าเป็นวิธีการเดียวกันนั่นเอง

$l = r$  (remainder= เศษเหลือ)

แต่ถ้าหารต่อเพื่อหาจุดทศนิยม แล้วก็ใส่ 0 0 0 0 ... หลักถัดต่อไปของตัวตั้ง ในทำนองเดียวกันกับ  
ข้างต้นหาผลคูณระหว่างตัวเลขตรงกับตัวเลขผลลัพธ์ที่ได้มาก่อน แล้วไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น(GD)ผลลัพธ์  
ขั้นต้นถัดไปทางขวา ได้ตัวตั้งสุทธิ(ND)เสร็จแล้วก็หารด้วยตัวหารหลักเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

$$8 \begin{array}{c} 2 \\ \left| \begin{array}{cccc|cccc} 9 & 14 & 41 & 73 & 17 & 10 & 20 & 20 & 0 \\ & 12 & 39 & 65 & 16 & 10 & 18 & 16 & \\ & & 1 & 8 & 1 & 10 & 2 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & 2 & 1 & \end{array} \right. \end{array}$$

ตอบ  $94137 \div 82 = 1148.0121...$

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ  $92054 \div 63$

General Division	
$92054 \div 63$	
$6 \overline{) 92054}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Create flag, 3, from divisor 2<sup>nd</sup> digit</li> <li>6 goes into 9 1 times with r3</li> </ol>
$6 \overline{) 92054}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Compute <math>32 - 3 \times 1 = 29</math></li> <li>6 goes into 29 4 times with r5</li> </ol>
$6 \overline{) 92054}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Compute <math>50 - 3 \times 4 = 38</math></li> <li>6 goes into 38 6 times with r2</li> </ol>
$6 \overline{) 92054}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>Compute <math>25 - 3 \times 6 = 7</math></li> <li>6 goes into 7 1 time with r1</li> <li>Compute <math>14 - 3 \times 1 = 11</math> remainder</li> </ol>
$= 1461 r11$	

วิธีทำ

- ให้ตัวเลขตัวที่ 2 คือ 3 ของตัวหารเป็นตัวเลขบนตรง
- $9 \div 6 = 1$  เศษเหลือ  $r = 3$
- คำนวณหาตัวตั้งสุทธิ  $32 - 3 \times 1 = 29$
- $29 \div 6 = 4$  เศษเหลือ  $r = 5$
- คำนวณหาตัวตั้งสุทธิ  $50 - 3 \times 4 = 38$
- $38 \div 6 = 6$  เศษเหลือ  $r = 2$
- คำนวณหาตัวตั้งสุทธิ  $25 - 3 \times 6 = 7$
- $7 \div 6 = 1$  เศษเหลือ  $r = 1$
- คำนวณหาเศษเหลือ  $14 - 3 \times 1 = 11$

ดังนั้น  $92054 \div 63 = 1461$  ,  $r = 11$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ  $716769 \div 54$

วิธีทำ	$5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}$	(GD)
	$\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	(ND)
	$\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	

ตอบ  $716769 \div 54 = 13273 \frac{27}{54} = 13273 \frac{1}{2}$

แต่ถ้าดำเนินการหารต่อ เต็มเลข 0 ในหลักถัดไปของตัวตั้ง

วิธีทำ	$5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}$	(GD)
	$\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	(ND)
	$\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{5 \overline{) 7 \ 21 \ 26 \ 47 \ 46 \ 39 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	

$27 \div 5 = 5$  เหลือเศษ 2 ใส่ 5 เป็นทศนิยมตัวที่หนึ่ง ส่วนเศษ 2 นำไปใส่ห้อยไว้หน้า 0 ได้ 20 เป็นตัวตั้ง  
 ขั้นต้น  $20 - 5(4) = 0$  เป็นทศนิยมตัวที่สองซึ่งเป็นการสิ้นสุดการหาร

ตอบ  $716769 \div 54 = 13273.5$

ตัวอย่างที่ 4 หาผลหารของ  $62823 \div 23$  คำตอบในรูปทศนิยม

วิธีทำ	$2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}$	
	$\phantom{2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	
	$\phantom{2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{2 \overline{) 6 \ 22 \ 28 \ 12 \ 13 \ 20 \ 20 \ 30}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	

ดังนั้น ตอบ  $27321 \frac{10}{23}$  หรือ 27321.4347...

ตัวอย่างที่ 5 หาผลหารของ  $1234 \div 12$

วิธีทำ	$1 \overline{) 1 \ 02 \ 03 \ 14 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20}$	
	$\phantom{1 \overline{) 1 \ 02 \ 03 \ 14 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{1 \overline{) 1 \ 02 \ 03 \ 14 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	
	$\phantom{1 \overline{) 1 \ 02 \ 03 \ 14 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$ $\phantom{1 \overline{) 1 \ 02 \ 03 \ 14 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20}} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0}$	

ดังนั้น ตอบ  $1234 \div 12 = 102 \frac{10}{12}$  หรือ  $1234 \div 12 = 102.8333...$

ข้อสังเกต ขั้นตอนการคิดมีลำดับดังนี้ : หาร, คูณ, ลบ, หาร, คูณ, ลบ, ...



### 5.1.3 ตัวหารเป็นจำนวนเต็ม 3 หลัก

ตัวอย่างที่ 1 หาผลหารของ  $8999222 \div 713$

วิธีทำ ในทำนองเดียวกันกับการหารที่มีตัวหาร 2 หลัก แบ่งตัวหารเป็นตัวหารหลักให้มีตัวเลขหนึ่งตัวที่เหลือไปไว้ที่ตัวเลขตรงก็จะมีส่วนสองตัว ดังนั้นส่วนเศษเหลือของตัวตั้งจะมีสองตัวเช่นกัน ดังแสดงข้างนี้

$$\begin{array}{r|l}
 7^{13} & 8 \quad 19 \quad 49 \quad 9 \quad 2 \quad | \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 & \text{คำตอบ} \quad | \quad \text{เศษเหลือหรือทศนิยม}
 \end{array}$$

#### ขั้นตอนการหาร

1.

$8 \div 7 = 1$  เหลือเศษ 1 ใส่ผลลัพธ์ 1 เป็นคำตอบตัวแรก ส่วนเศษเหลือ 1 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าตัวเลขถัดไปของตัวตั้ง คือ 9 ได้เป็น 19 เรียกว่าตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณตัวเลขตัวแรกของตัวเลขตรง (1) กับผลหารตัวแรกคือ 1 ได้  $1 \times 1 = 1$  แล้วนำไปลบออกจาก 19 ซึ่งเป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) ได้  $19 - 1 = 18$  เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งในการหารด้วยตัวหารหลักถัดไป

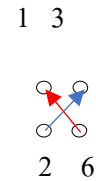
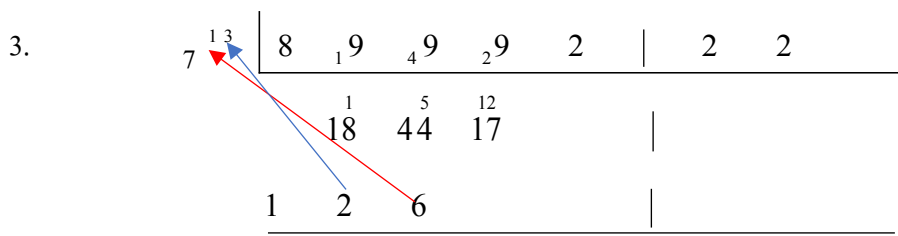
ข้อสังเกต การคูณข้างต้นเป็นการคูณแบบแนวตั้ง

2.

$18 \div 7 = 2$  เหลือเศษ 4 ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 4 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข

9 ได้ 49 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3) กับคำตอบตัวที่หนึ่งและตัวที่สอง (1, 2)

ได้  $(2 \times 1) + (1 \times 3) = 5$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 49 คือ  $49 - 5 = 44$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งที่ใช้ในการหารด้วยตัวหารหลัก ถัดไป



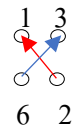
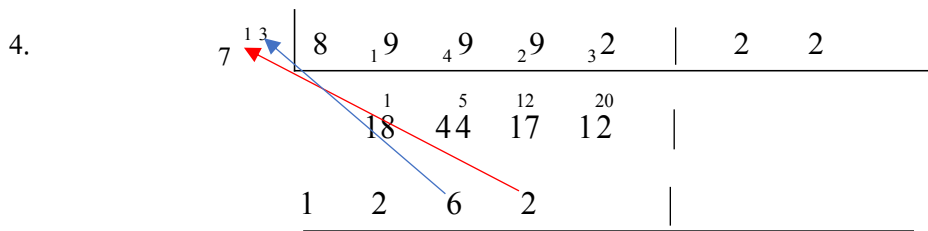
$44 \div 7 = 6$  เหลือเศษ 2 ใส่ผลลัพธ์ 6 เป็นตัวที่สามของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 2 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 9 ได้ 29 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หากคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้โดยการเลื่อนตัวคูณ (Moving Multiplier)

หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่สองและตัวที่สาม (2, 6)

ได้  $(6 \times 1) + (2 \times 3) = 12$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 29 คือ  $29 - 12 = 17$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งที่ใช้ในการหารด้วยตัวหารหลัก ถัดไป

**ข้อสังเกต** การคูณข้างต้นเป็นการคูณแบบแนวตั้งและแนวไขว้โดยการเลื่อนตัวคูณ (Moving Multiplier)

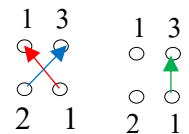
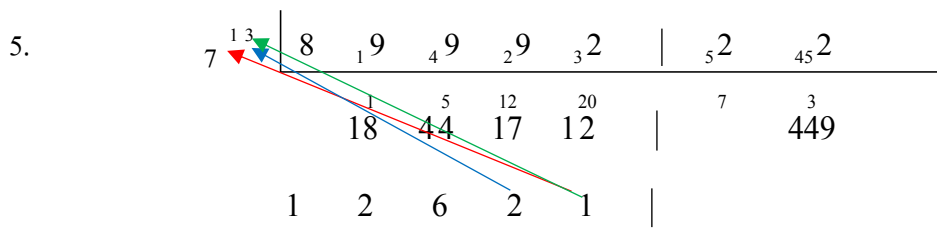


$17 \div 7 = 2$  เหลือเศษ 3 ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นตัวที่สี่ของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 3 นำไปเขียนห้อยข้างหน้า เลข 2

ได้ 32 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่สามและตัวที่สี่ (6, 2)

ได้  $(1 \times 2) + (6 \times 3) = 20$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 32 คือ  $32 - 20 = 12$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้งสุทธิ (ND) ซึ่งเป็นตัวตั้งที่ใช้ในการหารด้วยตัวหารหลัก ถัดไป



$12 \div 7 = 1$  เหลือเศษ 5 ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นตัวที่ห้าของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 5 นำไปเขียนห้อยข้างหน้าเลข 2

ได้ 52 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่สี่และตัวที่ห้า (2,1)

ได้  $(1 \times 1) + (2 \times 3) = 7$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 52 คือ  $52 - 7 = 45$  ได้ผลลัพธ์เป็น

ตัวตั้งสุทธิ (ND) แต่เนื่องจากผลลัพธ์นี้ได้ผ่านเส้นคั่นจึงเป็นคำตอบของเศษเหลือ

จากวิธีการคูณแนวตั้งแนวไขว้จึงปิดการดำเนินการหารด้วยตัวคูณท้ายสุดด้วยแนวตั้ง ตัวตั้งสุทธิตัวสุดท้าย

จึงเป็นเศษเหลือ ดังนั้นจึงนำตัวตั้งสุทธิ 45 ไปเขียนห้อยไว้ที่ตัวสุดท้ายของตัวตั้ง เป็นเศษเหลือขั้นต้น

เท่ากับ 452 หาผลคูณแนวตั้งของตัวเลขตัวสุดท้ายของตัวเลขตรงกับตัวเลขตัวสุดท้ายของคำตอบจำนวนเต็ม

คือ  $3 \times 1 = 3$  ลบเศษเหลือขั้นต้น ด้วยผลคูณสุดท้ายจะได้เศษเหลือ  $452 - (3 \times 1) = 449 = r$

ดังนั้น  $8999222 \div 713 = 12621 \frac{449}{713}$

ในกรณีที่ต้องการคำตอบเป็นทศนิยม การดำเนินการหารต่อจากข้างต้นด้วยการเติมเลข 0 ต่อเนื่องจากตัวตั้งทางขวามือ แล้วดำเนินการหารในขั้นตอนที่ 5 ต่อ

7	8	1	9	4	9	2	9	3	2		5	2	2	0	0	0	0		1	3
13	18	44	17	12	12		7	45		2	1		1	3		2	1		1	3
1	2	6	2	1		6		6		1	6		1	6		1	6		1	6

$12 \div 7 = 1$  เหลือเศษ 5 ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นตัวที่ห้าของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 5 นำไปเขียนห้อยข้างหน้า เลข

2 ได้ 52 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่สี่และตัวที่ห้า (2,1)

ได้  $(1 \times 1) + (2 \times 3) = 7$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 52 คือ  $52 - 7 = 45$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง

สุทธิ(ND) ในการหารถัดไป

6.

7	8	1	9	4	9	2	9	3	2		5	2	3	2	0	0	0	0		1	3
13	18	44	17	12	12		7	45		9	23		1	3		1	6		1	6	
1	2	6	2	1		6		6		1	6		1	6		1	6		1	6	



$45 \div 7 = 6$  เหลือเศษ 3 ใส่ผลลัพธ์ 6 เป็นทศนิยมตัวที่แรกของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 3 นำไปเขียนห้อย

ข้างหน้าเลข 2 ได้ 32 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่ห้าและตัวที่หก (1,6)

ได้  $(1 \times 6) + (1 \times 3) = 9$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 32 คือ  $32 - 9 = 23$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง  
สุทธิ (ND) ในการหารถัดไป

7.

7	8	19	49	29	32	52	32	90	0	0	0	0
	18	44	17	12	12	45	23	70	20	70	20	70
	1	2	6	2	1	6	2	6	2	6	2	6

1	3
6	2

$23 \div 7 = 3$  เหลือเศษ 2 ใส่ผลลัพธ์ 3 เป็นทศนิยมตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 2 นำไปเขียนห้อย

ข้างหน้าเลข 0 ได้ 20 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่หกและตัวที่เจ็ด (6,3)

ได้  $(1 \times 3) + (6 \times 3) = 21$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 20 คือ  $20 - 21 = -1$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง  
สุทธิ (ND) ซึ่งจะเป็นจำนวนลบหรือศูนย์ไม่ได้ จึงต้องลค่าลงไป 1 ให้คำตอบขึ้นเป็น 2 โดยเริ่มต้นหารใหม่

ดังนั้น  $23 \div 7 = 2$  เหลือเศษ 9 ใส่ผลลัพธ์ 2 เป็นทศนิยมตัวที่สองของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 9 นำไปเขียน

ห้อยข้างหน้าเลข 0 ได้ 90 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่หกและตัวที่เจ็ด (6,2)

ได้  $(1 \times 2) + (6 \times 3) = 20$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 90 คือ  $90 - 20 = 70$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง  
สุทธิ (ND) ในการหารถัดไป

8.

7	8	19	49	29	32	52	32	90	70	0	0	0
	18	44	17	12	12	45	23	70	15	70	15	70
	1	2	6	2	1	6	2	6	2	6	2	6

1	3
2	9

$70 \div 7 = 9$  เหลือเศษ 7 ใส่ผลลัพธ์ 9 เป็นทศนิยมตัวที่สามของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 7 นำไปเขียนห้อย

ข้างหน้าเลข 0 ได้ 70 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขตรงสองตัว (1 3)

กับคำตอบตัวที่หกและตัวที่เจ็ด (2,9)

ได้  $(1 \times 9) + (2 \times 3) = 15$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 70 คือ  $70 - 15 = 55$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง  
 สุทธิ(ND) ในการหารถัดไป

$$\begin{array}{r}
 9. \quad 7 \overline{) 13} \left| \begin{array}{cccc|cccc}
 8 & 19 & 49 & 29 & 32 & 52 & 32 & 90 & 70 & 60 & 0 \\
 & 18 & 44 & 17 & 12 & 45 & 23 & 70 & 55 & 26 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 6 & 2 & 9 & 7 & \\
 \hline
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 1 \ 3 \\
 \circ \ \circ \\
 \swarrow \ \searrow \\
 9 \ 7
 \end{array}
 \end{array}$$

$55 \div 7 = 7$  เหลือเศษ 6 ใส่ผลลัพธ์ 7 เป็นทศนิยมตัวที่สี่ของคำตอบ ส่วนเศษเหลือ 6 นำไปเขียนห้อย

ข้างหน้าเลข 0 ได้ 60 เป็นตัวตั้งขั้นต้น (GD) หาผลคูณแนวไขว้ตัวเลขสองตัว (1 3)  
 กับคำตอบตัวที่หกและตัวที่เจ็ด (9, 7)

ได้  $(1 \times 7) + (9 \times 3) = 34$  แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้งขั้นต้น 60 คือ  $60 - 34 = 26$  ได้ผลลัพธ์เป็นตัวตั้ง  
 สุทธิ(ND) ในการหารถัดไป

ดังนั้น  $8999222 \div 713 = 12621.6297\dots$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลหารของ  $3958761 \div 245$

$$\begin{array}{r}
 \text{วิธีทำ} \quad 2 \overline{) 45} \left| \begin{array}{cccc|cc}
 3 & 19 & 35 & 48 & 47 & 66 & 91 \\
 & 4 & 29 & 34 & 25 & 57 & 40 \\
 & 15 & 6 & 14 & 22 & & 51=r \\
 \hline
 & 1 & 6 & 1 & 5 & 8 & \\
 \hline
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 1 \ - \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 1 \ 6 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 6 \ 1 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 1 \ 5 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 5 \ 8 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 5 \ 8 \end{array}$

แต่ถ้าต้องการคำตอบเป็นทศนิยม ก็ดำเนินการหารต่อ

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 45} \left| \begin{array}{cccc|cccccc}
 3 & 19 & 35 & 48 & 47 & 66 & 51 & 31 & 40 & 60 & 40 \\
 & 4 & 29 & 34 & 25 & 57 & 48 & 10 & 32 & 44 & 31 \\
 & 15 & 6 & 14 & 22 & 9 & 3 & 20 & 8 & 16 & 9 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 8 & 1 & 6 \\
 \hline
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 5 \ 8 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 8 \ 2 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 2 \ 0 \end{array}$

$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 0 \ 8 \end{array}$

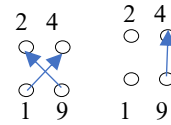
$\begin{array}{c} 4 \ 5 \\ \circ \ \circ \\ \swarrow \ \searrow \\ 8 \ 1 \end{array}$

ตอบ  $3958761 \div 245 = 16158.20816\dots$

ตัวอย่างที่ 3 หาผลหารของ  $62346 \div 524$

วิธีทำ ขั้นตอนการหารดังนี้

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 6 \ 2 \ 3 \ | \ 4 \ 6} \\
 \underline{10 \ 47 \ | \ 22 \ 36} \\
 1 \ 1 \ 9 \ | \ 
 \end{array}$$



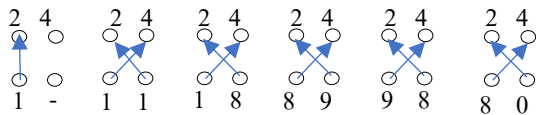
เนื่องจากการหารได้ส่วนแรกของตั้งตั้งได้สิ้นสุด ดังนั้นส่วนที่เหลือก็จะเป็นเศษเหลือ ซึ่งเศษเหลือ = -10

$$\text{ดังนั้น } 62346 \div 524 = 119 \frac{10}{524} = 118 \frac{524+10}{524} = 118 \frac{514}{524}$$

หรือ ถ้าต้องการคำตอบเป็นทศนิยมแล้วเราก็เติม 0 ต่อท้ายส่วนทางขวาตามที่ต้องการเลขจุดทศนิยมกี่ตัวแล้วดำเนินการหารต่อไป

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 6 \ 2 \ 3 \ | \ 4 \ 9 \ 6 \ 0 \ 8 \ 0 \ 7 \ 0} \\
 \underline{10 \ 47 \ | \ 54 \ 46 \ 52 \ 32} \\
 1 \ 1 \ 8 \ | \ 9 \ 8 \ 0 \ 9
 \end{array}$$

ตอบ  $62346 \div 524 = 118.9809\dots$



ตัวอย่างที่ 4 หาผลหารของ  $123123 \div 128$

วิธีทำ สังเกตตัวอย่างนี้ตัวหาร 128 การหารแบบเวทคณิตได้แบ่งตัวหารเป็น 2 ส่วน มักจะแบ่งตัวหารหลักไว้หนึ่งตัว จะพบว่าตัวหารหลักเป็นเลข 1 แต่กล่าวง่าย ๆ ว่าเราไม่มีสูตรคูณแม่หนึ่ง (1) ดังนั้นจึงแบ่งตัวหารหลักเป็น 12 ส่วนตัวเลขบนตรงเป็น 8 เสีย ก็สามารถดำเนินการหารแบบเวทคณิตได้ แต่จริง ๆ เราก็สามารถหารด้วยตัวหารที่เป็น 1 ก็ได้ ดังที่จะแสดงต่อไปนี้

ขั้นตอนการหารเมื่อตัวหารหลักคือ 12 เป็นดังนี้

$$\begin{array}{r}
 12 \overline{) 12 \ 3 \ 1 \ 2 \ | \ 3} \\
 \underline{0 \ 123 \ 79 \ 24 \ | \ 8} \\
 0 \ 9 \ 6 \ 1 \ | \ 
 \end{array}$$

ขั้นตอนการหารเมื่อตัวหารหลักคือ 1 ให้ใช้วิธีสังเกตจากตัวหารจริงคือ 128 เป็นดังนี้

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 123123} \\
 \underline{123} \phantom{00} \\
 0 \phantom{00}
 \end{array}$$

หรือแปลงตัวหารเป็นจำนวนวินคิวลัม  $123123 \div 128 \rightarrow 123123 \div 132$

$$\begin{array}{r}
 13 \overline{) 123123} \\
 \underline{123} \phantom{00} \\
 0 \phantom{00}
 \end{array}$$

ตอบ  $123123 \div 128 = 961 \frac{115}{128}$

ตัวอย่างที่ 5 หาผลหารของ  $716769 \div 156$

วิธีทำ ตัวหารแบ่งเป็นสองส่วน ส่วนตัวหารหลักเป็น 15 ส่วนตัวเลขบนตรง คือ 6

ตัวตั้งคงแบ่งเป็นสองส่วนเช่นเดียวกันคือ  $71676 \mid 9$

$$\begin{array}{r}
 15 \overline{) 716769} \\
 \underline{92} \phantom{00} \\
 0 \phantom{00}
 \end{array}$$

หรือ ตัวหารแบ่งเป็นสองส่วน ส่วนตัวหารหลักเป็น 1 ส่วนตัวเลขบนตรง คือ 56

ตัวตั้งคงแบ่งเป็นสองส่วนเช่นเดียวกันคือ  $7167 \mid 69$

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 716769} \\
 \underline{11} \phantom{00} \\
 4 \phantom{00}
 \end{array}$$

ตอบ  $716769 \div 156 = 4594 \frac{105}{156}$

หรือต้องการคำตอบทศนิยม

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 56 \overline{) 7 \quad 3 \quad 1 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad | \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 9 \quad 8 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 0} \\
 \underline{11 \quad 17 \quad 12 \quad | \quad 12 \quad 15 \quad 9 \quad 3 \quad 12} \\
 4 \quad 5 \quad 9 \quad 4 \quad | \quad 6 \quad 7 \quad 3 \quad 0 \quad 7
 \end{array}$$

ตอบ  $716769 \div 156 = 4594.67307\dots$

### 5.1.4 ตัวหารเป็นจำนวนเต็ม 4 หลักขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 1 หาผลหารของ  $7342654 \div 5214$

วิธีทำ การแบ่งตัวหารออกเป็น 2 ส่วน  $5 \overline{) 214}$  และตัวตั้งเป็น  $2342 \overline{) 654}$  ตามเงื่อนไขข้างต้น

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 214 \overline{) 7 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad | \quad 6 \quad 5 \quad 1} \\
 \underline{21 \quad 5 \quad 44 \quad | \quad 32 \quad 8 \quad 32} \\
 1 \quad 4 \quad 0 \quad 8 \quad | \quad 1339 = r
 \end{array}$$

ตอบ  $7342651 \div 5214 = 1408 \frac{1339}{5214}$

แต่ถ้าต้องการคำตอบเป็นทศนิยมเราก็ต่อท้ายตัวตั้งด้วยเลขศูนย์เท่าที่ต้องการตัวเลขทศนิยมนั้น ๆ ดังวิธีทำต่อไปนี้

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 214 \overline{) 7 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad | \quad 6 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad 0} \\
 \underline{21 \quad 5 \quad 44 \quad | \quad 14 \quad 33 \quad 37 \quad 45} \\
 1 \quad 4 \quad 0 \quad 8 \quad | \quad 2 \quad 5 \quad 6 \quad 8
 \end{array}$$

ตอบ  $7342651 \div 5214 = 1408.2568\dots$





### อุปสูตรที่ 16 ธวาชางกะ

उपसूत्र १६.ध्वजांक = Upasūtra 14. dhvajāṅka - On the flag.

ธวาช (Dhvajā) - ธง (flag)

ธวาชางกะ (Dhvajāḍa or Dhvajāṅka = (ध्वजांक)) – ตัวเลขธง (Flag digit)

### ภาคผนวก

#### การคูณและการหารด้วยเวทคณิต

- การคูณด้วยสูตรแนวตั้งและแนวไขว้หรือการคูณด้วยสูตรอูรหะ ติริยักภยาม (सूत्र ३. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्यां = Sutra 3. Ūrdhva Tiryaḅhyām) \
- การหารตรงหรือการหารแบบธง (Straight Division or Flag Division) เป็นการหารด้วยอุปสูตรธวาชางกะ( ध्वजांक विधि से भाग = Upsutra 16. Dvajāḍa or Dvajāṅka )

จากตัวอย่างข้างต้น หาผลคูณ ของ  $374261 \times 72$

วิธีทำ การคูณแบบเวทคณิตเป็นดำเนินการคูณจากซ้ายไปขวา

$$\begin{array}{r}
 3 \ 7 \ 4 \ 2 \ 6 \ 1 \\
 \times \quad \quad \quad 7 \ 2 \\
 \hline
 2 \ 6 \ 9 \ 4 \ 6 \ 7 \ 9 \ 2
 \end{array}$$

Diagram showing the multiplication process with arrows indicating the sequence of digits from left to right. Below the result, the carry values are listed:  $6+49$ ,  $14+28$ ,  $8+4$ ,  $4+42$ ,  $12+7$ ,  $2+0$ .

หาผลหารของ  $374261 \div 72$

$7 \ 2$	$2 \ 6$	$\overset{53}{5}9$	$\overset{30}{4}4$	$\overset{18}{2}6$	$\overset{43}{4}7$	$\overset{7}{1}9$	$\overset{0}{0}2$
Q	0	3	$\overset{6}{7}$	$\overset{14}{4}$	$\overset{8}{2}$	$\overset{1}{6}$	$\overset{12}{1}0$

วิเคราะห์โครงสร้างการหาร

$7 \ 2$	$2 \ 1$	$\overset{5}{4} \overset{6+49}{5}$	$\overset{2}{2} \overset{14+28}{2}$	$\overset{2}{4} \overset{8+14}{4}$	$\overset{6}{1} \overset{4+42}{1}$	$\overset{9}{0} \overset{12+7}{0}$	$\overset{2}{0} \overset{2+0}{0}$
Q	0	3	$\overset{6}{7}$	$\overset{14}{4}$	$\overset{8}{2}$	$\overset{1}{6}$	$\overset{12}{1}0$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ตัวหาร 2 หลักให้ตอบผลลัพธ์และเศษเหลือ

$$1. 5^2) \underline{20972}$$

$$2. 6^3) \underline{67938}$$

$$3. 7^2) \underline{98917}$$

$$4. 2^9) \underline{35691}$$

$$5. 6^3) \underline{48693}$$

$$6. 8^8) \underline{85996}$$

$$7. 9^3) \underline{35691}$$

$$8. 7^2) \underline{95064}$$

$$9. 5^8) \underline{99679}$$

$$10. 4^1) \underline{40897}$$

$$11. 8^9) \underline{89507}$$

$$12. 8^7) \underline{81509}$$

$$13. 4^6) \underline{35691}$$

$$14. 5^2) \underline{57597}$$

$$15. 3^9) \underline{65511}$$

$$16. 2^9) \underline{67528}$$

$$17. 4^8) \underline{74270}$$

$$18. 1^2) \underline{37589}$$

ให้ตอบผลลัพธ์และทศนิยมสามตำแหน่ง

$$19. 7698128 \div 67$$

$$20. 98076544 \div 54$$

$$21. 8987665 \div 13$$

$$22. 69877128 \div 76$$

$$23. 98176028 \div 98$$

$$24. 768709127 \div 41$$



$25. 87568600987568 \div 81$

$26. 66860098758758 \div 75$

$27. 6686089987587590808 \div 76$

$28. 7590808668608998758 \div 65$

**แบบฝึกหัดชุดที่ 3** ตัวหารตั้งแต่ 3 หลักขึ้นไป ตอบผลลัพธ์และเศษเหลือ

$1. 99760559 \div 914$

$2. 9877751339 \div 821$

$3. 89549076422 \div 813$

$4. 2346204541 \div 923$

$5. 89088495161 \div 603$

$6. 15689326632 \div 921$

$7. 907666760673 \div 832$

$8. 99751227 \div 975$

$9. 76055999 \div 914$

$10. 751339 \div 821$

$11. 70312976370 \div 9142$

$12. 222978784 \div 6107$

$13. 32173883321 \div 7217$

$14. 2803716399 \div 81213$

$15. 397209672 \div 73412$

$16. 838138462 \div 39838$

ตอบผลลัพธ์ทศนิยม 4 ตำแหน่ง

$17. 3005418 \div 713$

$18. 19411565 \div 822$

$19. 2767773 \div 814$

$20. 9879.879 \div 413$

$21. 3094717 \div 642$

$22. 81039 \div 724$

$23. 1040201 \div 814$

$24. 231884 \div 453$

$25. 135790 \div 691$

$26. 102030.405 \div 7898$

$27. 23188456 \div 25432$

$28. 2318844578 \div 452413$







หมายเหตุ การหาผลบวกแต่ละไม่เกิน 9 จึงไม่มีการทด ถ้าในกรณีที่มีการทดให้ใช้ด้วยการทจุด (•) ให้กับหลักที่อยู่ถัดไปข้างหน้า

ในกรณีที่ต้องการคำตอบเป็นทศนิยมและจำนวนทศนิยมกี่ตำแหน่ง ก็ให้ใส่ 0 เพิ่มต่อจากตัวเลขตัวส่วนที่เป็นเศษเหลือของตัวตั้งเดิมเท่ากับจำนวนทศนิยมที่ต้องการนั้น แล้วดำเนินการหารเช่นเดียวกับข้างต้น  
 เช่น ในตัวอย่างนี้ต้องการทศนิยม 4 ตำแหน่ง ก็เพิ่ม 0 อีกสามตัวต่อจากส่วนที่เป็นเศษเหลือ เพื่อการปัดค่าทศนิยมตามที่หลักการเลขคณิต ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 88 \ ) \ 1000 \mid 23000 \\
 12 \quad \quad 12 \mid \\
 \quad \quad \quad 1 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid 36 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \cdot 84 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid 204 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \quad \dot{2} \ \dot{8} \ 8 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \quad \quad \dot{3} \ 8 \ 4 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \quad \quad \quad 5 \ 5 \ 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \quad \quad \quad \cdot 7 \ 0 \ 8 \\
 \hline
 113 \mid 89772628
 \end{array}$$

ตอบ  $10021 \div 88 = 113.89772628\dots$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลหารของ  $211011 \div 898$

วิธีทำ ตัวหารคือ 898 ฐาน 1000 ค่าเบี่ยงฐาน = 102

$$\begin{array}{r}
 898 \ ) \ 211 \mid 011 \\
 102 \quad 20 \mid 4 \\
 \quad \quad 3 \mid 06 \\
 \quad \quad \quad \mid 408 \\
 \hline
 234 \mid 879 \quad \text{ตอบ } 211011 \div 898 = 234 \frac{879}{898}
 \end{array}$$





ตัวอย่างที่ 5 หาผลหารของ  $39999521 \div 9819$

วิธีทำ ตัวหารคือ 9819 ฐาน 10000

ค่าเบี่ยงฐาน = 0181

$$9819 \ ) \ 3 \ 9 \ 9 \ | \ 9 \ 5 \ 2 \ 1$$

$$0181 \quad 0 \ 5 \ | \ 4 \ 3$$

$$1 \ | \ 6 \ 2 \ 9$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} \ | \ 2 \ 7 \ 1 \ 5}$$

$$3 \ 9 \ 15 \ | \ 2 \ | \ 2 \ 8 \ 2 \ 6$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} \ | \ 0 \ 3 \ 6 \ 2}$$

$$\underline{\underline{4 \ 0 \ 5 \ | \ 2 \ | \ 3 \ 1 \ 8 \ 8}} \quad \therefore 39999521 \div 9819 = 407 \frac{3188}{9819}$$

ตัวอย่างที่ 6 หาผลหารของ  $11199171 \div 99979$

วิธีทำ ตัวหารคือ 99979 ฐาน 100000 ค่าเบี่ยงฐาน = 00021

$$99979 \ ) \ 1 \ 1 \ 1 \ | \ 9 \ 9 \ 1 \ 7 \ 1$$

$$00021 \quad 0 \ 0 \ | \ 0 \ 2 \ 1$$

$$0 \ | \ 0 \ 0 \ 2 \ 1$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1}$$

$$1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ | \ 0 \ 1 \ 5 \ 0 \ 2$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1}$$

$$\underline{\underline{1 \ 1 \ 1 \ | \ 1 \ | \ 0 \ 1 \ 5 \ 2 \ 3 = 112 \ | \ 1523}}$$

ตอบ  $\therefore 11199171 \div 99979 = 112 \frac{1523}{99979}$



## การประยุกต์การหารวิธีนิขิลัมด้วยสูตรสัดส่วนช่วย

ตัวอย่างที่ 7 หาผลหารของ  $303712 \div 489$

วิธีทำ ตัวหารคือ 489 ซึ่งไม่ใกล้ฐาน 1000 แต่เราสามารถใช้สูตรสัดส่วนคูณขยายตัวหารมีค่าใกล้เคียงฐานได้ ในตัวอย่างนี้ขยายเป็นสองเท่าดังนี้  $489 \times 2 = 978$  ได้ตัวหารมีค่าใกล้เคียงฐาน 1000

ดังนั้นหาตัวเต็มเต็มหรือค่าเบี่ยงฐาน = 022 แต่เมื่อได้ผลหารแล้ว ผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนเต็มต้องคูณด้วยสัดส่วนที่เพิ่มขึ้นนั้น ส่วนเศษเหลือไม่ต้องเพิ่ม

หมายเหตุ เหตุผลข้างต้นเป็นไปตามการคูณด้วยสูตรนิขิลัม

วิธีทำดังนี้

$$489 \times 2 \rightarrow 978 \quad ) \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 1 \quad 1 \quad 3$$

$$022 \quad 0 \quad 6 \quad | \quad 6$$

$$0 \quad | \quad 4 \quad 4$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} | \quad 1 \quad 9 \quad 8}$$

$$3 \quad 2 \quad 9 \quad | \quad 1 \quad | \quad 3 \quad 5 \quad 1$$

$$\underline{\hspace{1.5cm} | \quad 0 \quad 2 \quad 2}$$

$$\underline{\underline{3 \quad 2 \quad 9 \quad | \quad 1 \quad | \quad 3 \quad 7 \quad 2}} \rightarrow 330 \quad | \quad 373 \rightarrow 330 \times 2 \quad | \quad 373 = 660 \frac{373}{489} \text{ ตอบ}$$

การหารด้วยวิธีนิขิลัม เป็นการหารที่ตัวหารที่มีค่ามาก ๆ ค่าใกล้ฐานหลัก เมื่อเป็นเช่นนี้จึงแปลงตัวหารที่มีค่ามาก

ให้มีค่าน้อยลงด้วยค่าเบี่ยงฐาน และวิธีการแปลงตัวหารที่มีค่ามากเป็นค่าเบี่ยงฐานนี้ใช้

วิธีนิขิลัม (สูตรทุกตัวครบเก้าแต่ตัวสุดท้ายครบสิบ)

ในเวทคณิตเป็นสูตรนิขิลัม นวตัสจรมัม ทศตหะ

(Sūtra 2. nikhilam navataścaramam daśataḥ = सूत्र २. निखिलं नवतश्चरमं दशतः )

Nikhilam Navataścaramam Daśataḥ = All from 9 and the Last from 10

Nikhilam = นิขิล. ค. อจิต สกถ สิ้นเชิง ทั้งสิ้น สมบูรณ์ ( All, complete, whole, entire, full)

Navataḥ = นวนุ น. เก้า ( Nine )

Carama = จรม ค. บังนิม อันเป็นที่สุด สุดท้าย ที่สุด ( the last, final, end, outermost ) และ

Daśataḥ = ทศนุ ค. สิบ ( Ten)



#### แบบฝึกหัดชุดที่ 4

ดำเนินการหารด้วยสูตรนิขิลัม(ตอบเศษเหลือ)

1.  $1121 \div 9$

2.  $82828 \div 9$

3.  $6434 \div 9$

4.  $11111 \div 8$

5.  $3452 \div 99$

6.  $425451 \div 98$

7.  $21234 \div 97$

8.  $230125 \div 96$

9.  $777732 \div 95$

10.  $234123 \div 88$

11.  $167589 \div 89$

12.  $144980 \div 83$

13.  $110167 \div 87$

14.  $213674 \div 86$

15.  $2216502 \div 809$

16.  $2121542 \div 987$

17.  $12246 \div 887$

18.  $30105 \div 799$

19.  $432171 \div 893$

20.  $2100346 \div 8877$

21.  $303512 \div 909$

22.  $1223451 \div 8888$

23.  $12781345 \div 7999$

24.  $1358979 \div 8897$

25.  $1010452 \div 7989$

26.  $1010101324 \div 899997$

27.  $11111111 \div 99979$

28.  $135790 \div 976$

29.  $231884 \div 879$

30.  $1040201 \div 814$

#### แบบฝึกหัดชุดที่ 5

ดำเนินการหารด้วยสูตรนิขิลัม(ตอบทศนิยมสามตำแหน่ง)

1.  $21321 \div 9$

2.  $12828 \div 8$

3.  $12434 \div 99$

4.  $33333 \div 88$

5.  $13452 \div 98$

6.  $145451 \div 97$

7.  $421234 \div 997$

8.  $160125 \div 96$

9.  $3787772 \div 995$

10.  $343786 \div 88$

11.  $126789 \div 899$

12.  $140981 \div 8399$

13.  $2002002 \div 89998$

14.  $13674 \div 9966$

15.  $166502 \div 989$

16.  $2121542 \div 8998$





ตัวอย่างที่ 2 หาผลหารของ  $4525 \div 11$

วิธีทำ ตัวหารคือ 11 ฐาน 10 ค่าเบี่ยงฐาน  $10 - 11 = -1 = \bar{1}$

$$\begin{array}{r}
 11 \ ) \ 4 \ 5 \ 2 \ | \ 5 \\
 \bar{1} \quad \bar{4} \quad | \\
 \quad \bar{1} \quad | \\
 \quad \quad \quad | \ \bar{1} \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \ \bar{1} \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \ 4 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

ตอบ  $4525 \div 11 = 411 \frac{4}{11}$

ขั้นตอนการหาร :

1. แยกตัวตั้งออกเป็น 2 ส่วน (ผลลัพธ์และเศษ) ส่วนที่ผลลัพธ์ตัวเลขจะต้องมีจำนวนตัวเลขเท่ากับจำนวนเลขศูนย์ของฐาน ในข้อนี้ส่วนผลลัพธ์ตัวเลขจึงมีจำนวน 1 ตัว เพราะใช้ฐาน 10
3. ชักตัวเลขโดด 4 ตัวแรกของตัวตั้งลงมาเป็นตัวเลขตัวแรกของค่าผลลัพธ์ส่วนจำนวนเต็ม
4. หาผลคูณ 4 กับค่าเบี่ยงฐานสลับเปลี่ยน ( $\bar{1}$ ) คือ  $4 \times \bar{1} = \bar{4}$  แล้วนำไปใส่ได้ตัวที่ 2 ของตัวตั้งแล้วหาผลบวกกันคือ  $\bar{4} + 5 = 1$  ใส่ 1 เป็นตัวเลขตัวที่ 2 ของผลลัพธ์
5. หาผลคูณ 1 กับค่าเบี่ยงฐานสลับเปลี่ยน ( $\bar{1}$ ) คือ  $1 \times \bar{1} = \bar{1}$  แล้วนำไปใส่ได้ตัวที่ 4 ของตัวตั้ง แต่เนื่องจากผลลัพธ์ตัวที่ 4 อยู่ในส่วนแบ่งที่เป็นเศษเหลือ แล้วหาผลบวกกับตัวเลขของตัวตำแหน่งเดียวกันคือ  $5 + \bar{1} = 4$  ใส่ 4 เป็นเศษเหลือของผลลัพธ์ จะเห็นว่าเมื่อดำเนินการหารจนถึงหลักสุดท้ายครบแล้ว เป็นการสิ้นสุดการหาร

ตอบ  $Q = 411, R = 4$

การพิสูจน์เชิงพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 3 หาผลหารของ  $(3x^2 + 2x + 12) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r}
 x + 2 \ ) \ 3x^2 + 2x + 12 \\
 -2 \quad \underline{\quad -6 \quad -8} \\
 \quad \underline{3x \quad + \quad 4} \quad \text{เศษ 4}
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 4 หาผลหารของ  $(x^3 + 6x^2 + 13x + 13) \div (x^2 + 2x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 3 \ ) \ x^3 + 6x^2 + 13x + 13 \\
 \underline{-2 \quad -3} \qquad \quad \underline{-2 \quad -3} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-8 \quad -12} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{x + 4 \quad \text{เศษ } 2x + 1}
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 5 หาผลหารของ  $271357 \div 112$

วิธีทำ ตัวหาร 112 มีค่าใกล้ฐาน 100

ค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยน  $100 - 112 = -12 = \overline{12}$

$$\begin{array}{r}
 112 \ ) \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \ | \ 5 \ 7 \\
 \underline{\overline{12} \quad \overline{2} \ \overline{4} \quad |} \\
 \qquad \qquad \underline{\overline{6} \ \overline{0} \quad |} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{10 \quad | \quad 8} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{\quad \quad | \quad \overline{15} \ \overline{6}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{2 \ 5 \ \overline{9} \ 13 \ | \ \overline{2} \ 1}} &= 25\overline{83} \frac{\overline{21}}{112} = 2423 \frac{\overline{19}}{112} = 2422 \frac{112 - 19}{112} \\
 &= 2422 \frac{10\overline{7}}{112} = 2422 \frac{93}{112}
 \end{aligned}$$

ตอบ  $271357 \div 112 = 2422 \frac{93}{112}$

ตัวอย่างที่ 6 หาผลหารของ  $12441 \div 1121$

วิธีทำ ตัวหาร 1121 มีค่าใกล้ฐาน 1000 แบ่งตัวตั้งส่วนเศษเหลือมีตัวเลขสามตัวเท่ากับจำนวนเลขศูนย์ของเลขฐาน ค่าเบี่ยงฐานสับเปลี่ยนคือ  $1000 - 1121 = -121 = \overline{121}$

$$\begin{array}{r}
 1121 \ ) \ 1 \ 2 \ | \ 4 \ 4 \ 1 \\
 \underline{\overline{121} \quad \overline{1} \quad | \quad \overline{2} \ \overline{1}} \\
 \qquad \qquad \underline{\quad \quad | \quad \overline{1} \ \overline{2} \ \overline{1}} \\
 \underline{\underline{1 \ 1 \quad | \quad 1 \ 1 \ 0}} \quad = 11 \frac{110}{1121}
 \end{array}$$

ตอบ  $12441 \div 1121 = 11 \frac{110}{1121}$

ตัวอย่างที่ 7 หาผลหารของ  $23479861 \div 112131$

วิธีทำ ตัวหาร 112131 มีค่าใกล้เคียงฐาน 100000 แบ่งตัวตั้งส่วนเศษเหลือมีตัวเลขหัวตัวเท่ากับจำนวนเลขศูนย์  
 ขอลเลขฐาน ค่าเบี่ยงฐานสลับเปลี่ยนคือ  $100000 - 112131 = -112131 = \overline{112131}$

$$\begin{array}{r}
 112131) \ 2\ 3\ 4\ 7 \mid 9\ 8\ 6\ 1 \\
 \overline{12131} \quad \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{2} \mid \bar{6}\ \bar{2} \\
 \quad \quad \bar{1}\ \bar{2} \mid \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{1} \\
 \quad \quad \quad 1 \mid 2\ 1\ 3\ 1 \\
 \hline
 \quad \quad \underline{2\ 1\ \bar{1}} \mid \underline{4\ 4\ 4\ 8\ 2} = 209 \frac{44482}{112131}
 \end{array}$$

ตอบ  $23479861 \div 112131 = 209 \frac{44482}{112131}$

ในกรณีตอบเป็นทศนิยม

$$\begin{array}{r}
 112131) \ 2\ 3\ 4 \mid 7\ 9\ 8\ 6\ 1\ 0\ 0 \\
 \overline{12131} \quad \bar{2}\ \bar{4} \mid \bar{2}\ \bar{6}\ \bar{2} \\
 \quad \quad \bar{1} \mid \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{1} \\
 \quad \quad \quad 1\ 2\ 1\ 3\ 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \bar{4}\ \bar{8}\ \bar{5}\ \bar{2}\ \bar{4} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4\ 8\ 5\ 2\ 4 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \bar{8}\ \bar{4}\ \bar{9}\ \bar{1}\ \bar{7} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1\ 2\ 1\ 3\ 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3\ 6\ 3\ 9\ 3 \\
 \hline
 \underline{\underline{2\ 1\ \bar{1}}} \mid \underline{\underline{4\ 0\ \bar{4}\ 7\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2}}} = 209.39966868\dots
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 8 หาผลหารของ  $1212 \div 112$  คำตอบในรูปทศนิยม

วิธีทำ ตัวหาร 112 มีค่าใกล้เคียงฐาน 100

ค่าเบี่ยงฐานสลับเปลี่ยน  $100 - 112 = -12 = \overline{12}$

$$\begin{array}{r|l}
 112) 12 & 1200000 \\
 \overline{12} & \overline{1} \overline{2} \\
 & \overline{1} \overline{2} \\
 & 24 \\
 & \overline{2} \overline{4} \\
 & \overline{2} \overline{4} \\
 & 72 \\
 & 36 \\
 \hline
 12 & 1200000 \\
 \hline
 11 & \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{6} \overline{3} \overline{5} \overline{6} = 10.821435\dots
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 8 หาผลหารของ  $32894 \div 1028$

วิธีทำ ค่าเบี่ยงฐานสลับเปลี่ยน  $1028 - 1000 = \overline{28}$

$$\begin{array}{r}
 * 1028 \ ) \ 32 \ / \ 8 \ 9 \ 4 \\
 \overline{028} \ 0 \ \overline{6} \ \overline{24} \\
 \hline
 \phantom{0} \ 0 \ \overline{4} \ \overline{16} \\
 \hline
 32 \ 2 \ \overline{19} \ \overline{12} \\
 \\
 = 31 / 1028 + 200 - 190 - 12 \\
 = 31 / 1026.
 \end{array}$$



### การหารด้วยสูตรปรววรรตย์ โยชเยต (Division By The Parāvartya Method) ในวทณตสูตรที่ 4 ปรววรรตย์ โยชเยต

(परवर्त्य योजयेत् = Sutra 4: Parāvartya Yojayet)

Parāvartya Yojayet – Transpose and Apply

Parāvartya = ปรววรรต. น. ‘ปรววรรตต์, ปรววรรต’ การแลกเปลี่ยน, การล่าถอยหรือออกกลับ

( turned back, exchanged or reversed)

โยชน. น. การต่อเข้า, ประสาน (Yojayet – connect, join or choose, make use of)



## เทคนิคการหารด้วยตัวหาร 11

การหารด้วยสูตรปรววรรตย์ โยชเขต สามารถนำไปใช้กับการหารที่ตัวหาร 11 ได้เทคนิคเฉพาะ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 หาผลหารของ  $4365783 \div 11$

วิธีทำ ตัวหาร 11 มีค่าใกล้ฐาน 10 จึงมีตัวเติมเต็มสับเปลี่ยน เท่ากับ  $10 - 11 = -1 = \bar{1}$

$$\begin{array}{r|l}
 11) & 4 \ 3 \ 6 \ 5 \ 7 \ 8 \ 3 \\
 & \bar{1} \ \bar{4} \\
 & \quad 1 \\
 & \quad \quad \bar{7} \\
 & \quad \quad \quad 2 \\
 & \quad \quad \quad \bar{9} \\
 \hline
 & 4 \ \bar{1} \ 7 \ \bar{2} \ 9 \ \bar{1} \ 4 \\
 \hline
 & = 396889 \frac{4}{11}
 \end{array}$$

จากตัวอย่างนี้พบเทคนิคการหารด้วยตัวหารเป็น 11 ดังนี้

$$\begin{array}{r|l}
 11) & 4 \ 3 \ 6 \ 5 \ 7 \ 8 \ 3 \\
 & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\
 & 4 \ \bar{1} \ 7 \ \bar{2} \ 9 \ \bar{1} \ 4
 \end{array}$$

เริ่มจากทางซ้ายมือชักตัวเลขตัวแรกของโจทย์ คือ 4 เป็นตัวแรกของคำตอบ แล้วนำไปลบตัวเลขถัดไปเป็นคำตอบตัวต่อไป  $3 - 4 = \bar{1}$

แล้วในทำนองเดียวกัน  $6 - \bar{1} = 7, 5 - 7 = \bar{2}, 7 - \bar{2} = 9, 8 - 9 = \bar{1}$

เนื่องจากการดำเนินการลบถึงส่วนแบ่งของตั้งตั้งเป็นส่วนเศษเหลือ ดังนั้น  $3 - \bar{1} = 4$  ได้ 4 เป็นเศษเหลือ

เพราะฉะนั้น  $4365783 \div 11 = 4\bar{1}729\bar{1} \frac{4}{11} = 396889 \frac{4}{11}$

ตัวอย่างที่ 8 หาค่าของ  $872032 \div 11$

$$\begin{array}{r|l}
 11) & 8 \ 7 \ 2 \ 0 \ 3 \ 2 \\
 & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\
 & 8 \ \bar{1} \ 3 \ \bar{3} \ 6 \ \bar{4}
 \end{array}$$

$$= 79276 \frac{4}{11} = 79275 + 1 + \frac{4}{11} = 79275 + \frac{11}{11} + \frac{4}{11} = 79275 \frac{7}{11}$$

เพราะฉะนั้น  $872032 \div 11 = 79275 \frac{7}{11}$

## แบบฝึกหัดชุดที่ 6

การหารโดยวิธีปราวรตย์ โยชเขต (ตอบเศษเหลือ)

1.  $11223 \div 112$
2.  $13737 \div 123$
3.  $1482 \div 139$
4.  $11568 \div 113$
5.  $36915 \div 112$
6.  $1425451 \div 114$
7.  $1212134 \div 115$
8.  $13230125 \div 135$
9.  $17867832 \div 1121$
10.  $279999 \div 1111$
11.  $161758 \div 1123$
12.  $33033 \div 1231$
13.  $2321 \div 118$
14.  $1991 \div 119$
15.  $12345 \div 1028$
16.  $121542 \div 1122$
17.  $301765 \div 1012$
18.  $1010 \div 113$
19.  $432171 \div 11$
20.  $2100346 \div 11$
21.  $303512 \div 11$
22.  $1223451 \div 11221$
23.  $12781345 \div 12123$
24.  $1358979 \div 11221$
25.  $1510452 \div 1125$
26.  $1010101324 \div 11112$
27.  $11111111 \div 11111$
28.  $135790 \div 1111$
29.  $1131884 \div 11010$
30.  $4020146 \div 11$

## แบบฝึกหัดชุดที่ 7

ดำเนินการหารโดยวิธีปราวรตย์ โยชเขต (ตอบทศนิยม 4 ตำแหน่ง)

1.  $21321 \div 101$
2.  $12828 \div 1111$
3.  $20734 \div 101$
4.  $1 \div 1111$
5.  $13452 \div 11$
6.  $4353451 \div 11$
7.  $421234 \div 11$
8.  $160125 \div 11$
9.  $3787772 \div 11101$
10.  $403786 \div 1112$
11.  $239479 \div 11203$
12.  $13456 \div 1123$
13.  $2002003 \div 12121$
14.  $13674 \div 11210$
15.  $66502 \div 1141$
16.  $121542 \div 1010$

