1. การยันความถูกต้อง

เรียบเรียง สมชาย ศรีวรางกูล

บรรณาธิการ กระจาย คงสง

ลือชัย ทิพรังศรี

บทนำ

เคยสังเกตไหม? ว่า ขณะที่เราท่องสูตรคูณแม่เก้า (9) “เก้าหนึ่งเก้า เก้าสองสิบแปด เก้าสามยี่สิบเจ็ด ... สิบสองเก้าร้อยแปด” แล้วเคยสังเกตไหมว่าผลคูณตั้งแต่หนึ่งถึงสิบสอง เมื่อนำเลขโดดที่ประกอบในแต่ละจำนวนนั้นมาบวกกันจะได้ผลบวกเลขโดดสุดท้ายเป็นเลขเก้า (9)

สูตรคูณแม่ 9

$9\times1 = 09 \rightarrow 0+9=9$

$9\times2 = 18 \rightarrow 1+8=9$

$9\times3 = 27 \rightarrow 2+7=9$

$9\times4 = 36 \rightarrow 3+6=9$

$9\times5 = 45 \rightarrow 4+5=9$

$9\times6 = 54 \rightarrow 5+4=9$

$9\times7 = 63 \rightarrow 6+3=9$

$9\times8 = 72 \rightarrow 7+2=9$

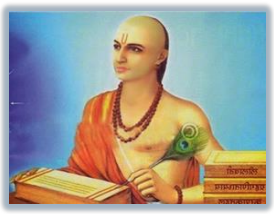
$9\times9 = 81 \rightarrow 8+1=9$

$9\times10 = 90 \rightarrow 9+0=9$

$9\times11 = 99 \rightarrow 9+9=18 \rightarrow 1+8=9$

$9\times12 = 108 \rightarrow 1+0+8=9$

อาจมีหลาย ๆ คนพบสมบัติชิ้นนี้แล้ว ๆคิดต่อไปหรือไม่ว่าทำไม ? เอาไปใช้อะไร



มีงานเขียนที่ยังหลงเหลือที่เก่าแก่ที่สุดได้อธิบายถึงสมบัติของเลขเก้า (9) คือ วิธีการคัดออกเก้าที่สามารถใช้ตรวจสอบคำตอบของการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้ คือ “ตำรามหาสิทธันตะ (Mahâsiddhânta)” ของอารยภัฏ (Aryabhata II ค.ศ. 920 -1000) นักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์ชาวอินเดีย

แล้วทำไมเกี่ยวข้องกับเวทคณิต ? เวทคณิตสามารถคำนวณการบวก ลบ คูณ หาร อื่น ๆ ได้เร็วและคิดในใจได้เพียงหนึ่งบรรทัด พร้อมกับกลไกการตรวจสอบยันความถูกต้อง (Cross-Checked) ที่แข็งแกร่ง มันง่าย ๆ และสนุกกับการคำนวณ

https://en.wikipedia.org/wiki/Casting_out_nines

อารยภัฏ

อารยภัฏ๒ (Aryabhata II ค.ศ. 920 -1000) นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียที่มีความสนใจด้านคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์เพื่อการพักผ่อนหย่อนใจ " อารยภัฏ ๒" ในชื่อของเขาหมายถึงบิดาอารยภัฏ (Aryabhata :476-c.550) นักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์ชาวฮินดูที่รู้จักกันดีกว่ามากหลังจากที่ อารยภัฏ ๒ ท่านจำลองงานของท่าน ในบรรดางานเขียนของอารยภัฏ ๒ คือ ตำรามหาสิทธันตะ (Mahâsiddhânta) ซึ่งเขากล่าวถึง **"การคัดออกเก้า" ซึ่งเป็นแนวคิดในวิชาคณิตศาสตร์เพื่อการพักผ่อนหย่อนใจ**

ดังนั้นก่อนที่จะศึกษาวิธีคิดเลขเร็วแบบเวทคณิตนั้นเป็นสิ่งที่น่าศึกษายิ่งแต่ก็ยังไม่เพียงพอ ยังต้องศึกษาวิธีตรวจสอบว่าการคิดเลขนั้นคิดได้อย่างถูกหรือไม่อีกด้วย ปกติวิธีที่เราใช้ดั้งเดิมอยู่นั้นก็คือตรวจซ้ำอีกรอบซึ่งมันอาจจะตรวจสอบผิดพลาดซ้ำแล้วซ้ำเล่ากับการตรวจซ้ำเดิม ๆ นั้น

การยันความถูกต้อง (Cross-Checked)

ความมีเสน่ห์ของเวทคณิตนอกจากจะเกี่ยวกับเรื่องการคิดเลขในใจและการคิดเลขเร็วแล้วก็คือการตรวจคำตอบโดยผลการดำเนินการทั้งหมดย่อมเท่ากัน (the whole product is the same) นั้นก็คือการยันความถูกต้อง (Cross-Checked) หรือในเวทคณิตเรียกวิธีนี้ว่า**วิธีพีชางกะ (Beejank Method)**

ในการคำนวณทุกประเภทนั้น ในขณะที่เรากำลังกระทำการบวก ลบ คูณ หาร ยกกำลังสองหรือการหารากที่สอง ของจำนวนต่าง ๆนั้น เมื่อการคำนวณถึงขั้นตอนสุดท้ายหาผลลัพธ์สิ้นสุดของคำตอบแล้ว ก็ยังถือว่าการคำนวณนั้นยังไม่สิ้นสุดอย่างสิ้นเชิง สิ่งที่จำเป็นและสำคัญอีกอย่างหนึ่งคือการตรวจสอบว่าการคำนวณที่ดำเนินการหาคำตอบอยู่นั้น คำตอบถูกต้องหรือไม่ ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยปกติแล้วการตรวจสอบความถูกต้องเราก็ใช้การคำนวณซ้ำ ๆ อีกรอบหนึ่งหรือบ้างครั้งก็สองถึงสามรอบ ซึ่งเป็นการตรวจสอบด้วยการคำนวณซ้ำ ๆ นั้นย่อมมีโอกาสที่จะคำนวณผิดพลาดซ้ำได้อีก และเป็นการเสียเวลาเท่ากับการคำนวณใหม่ แล้วจะมีวิธีการอื่นไหมที่สามารถตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบได้รวดเร็วและมีประสิทธิภาพ ที่ไม่ต้องทำซ้ำกับวิธีเดิมนั้นอีก

คำถามคือ จะมีวิธีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบในการคำนวณ โดยใช้วิธีการอื่นที่แตกต่างจากที่เคยใช้อยู่ดั้งเดิมที่ได้รับการเรียนรู้มานั้นหรือไม่? คำตอบก็คือ **“การยันความถูกต้อง”**

ดังนั้น “การยันความถูกต้อง คือตรวจสอบ (ตัวเลขหรือข้อมูล) โดยใช้แหล่งหรือวิธีการอื่น”

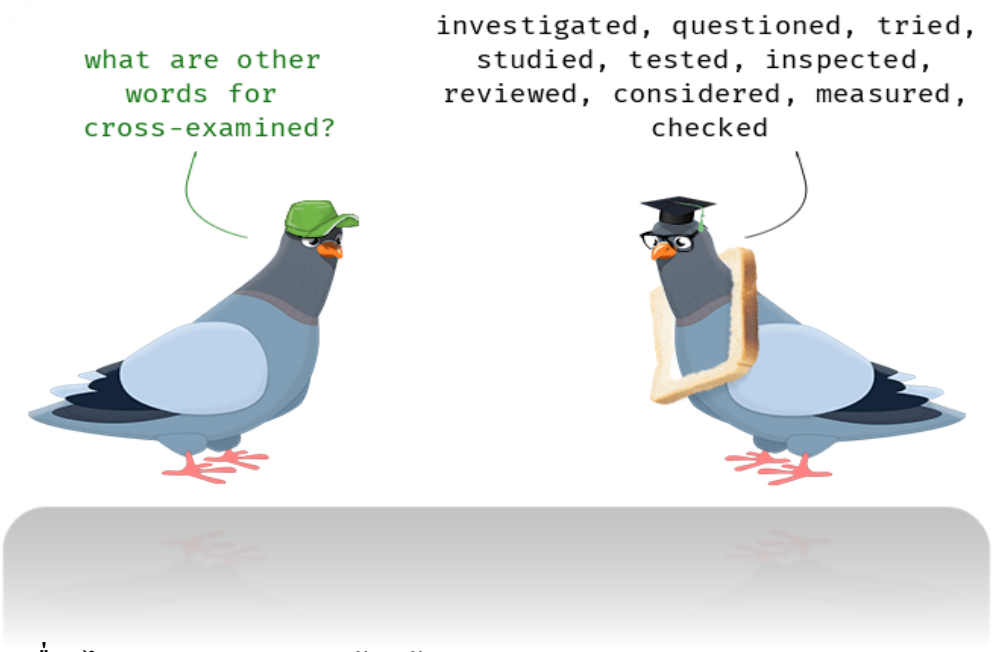
การยันความถูกต้อง มี 2 วิธี คือ

- **การคัดออกเก้า (Casting Out Nines)**
- **การคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)**

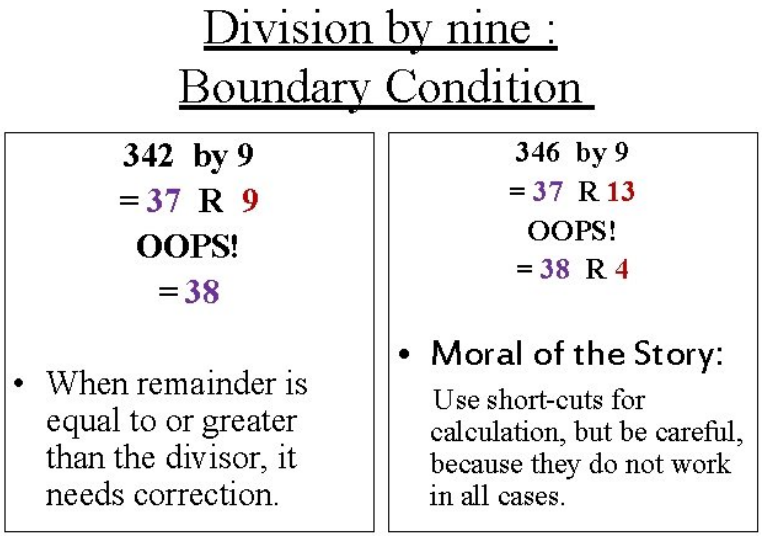
ก่อนที่จะศึกษา วิธีตรวจสอบคำตอบในการคำนวณ เช่น การบวก การลบ การคูณและการหาร เป็นต้น ด้วยวิธียันความถูกต้องนั้น เพื่อความเข้าใจอย่างถ่องแท้ในความรู้นี้เราควรจะต้องศึกษาความรู้พื้นฐานต่อไปนี้เสียก่อนจึงจะสามารถตกผลึกความคิดได้

หมายเหตุ

1. Cross-Checked มีคำพ้องความหมายกับ Cross-examined



2. เงื่อนไขขอบเขตของการหารด้วยเก้า



1.1 เศษเหลือของจำนวนที่ถูกหารด้วยเก้า

เก้า (9) เป็นเลขมหัศจรรย์ ในคณิตศาสตร์ มันเป็นเลขโดดที่มีค่ามากที่สุด ในระบบการนับฐานสิบของระบบฮินดู-อารบิก

ในเวทคณิตได้กล่าวถึงการยันความถูกต้องไว้ใน สูตรนวเศษ (Vedic Sutra Navasesh) ซึ่งเป็นภาษาสันสกฤต มาจากรากศัพท์

- นวนฺ ค. พพ. ‘นวัน’ เก้า (nine)
- เศษ. น. สิ่งที่เหลือ เดน ทรัพยเศษ (remainder, leavings, balance)

สมบัติของ การหารจำนวนเต็มบวก (Positive Whole Number) **ใด ๆ ด้วย เก้า พบสมบัติเศษเหลือที่หารด้วยเก้านี้สามารถหาได้จากผลบวกเลขโดดของจำนวนเต็มนั้นได้ด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้**

กำหนด ให้หาการหารของ $3758\div 9$ **และ** $4572\div 9$

วิธีตั้งหาร

$$\begin{array}{r} 417 \\ 9\overline{)3758} \\ \underline{36} \\ 15 \\ \underline{09} \\ 68 \\ \underline{63} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 508 \\ 9\overline{)4572} \\ \underline{45} \\ 07 \\ \underline{00} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

จากการหารข้างต้น $3758\div 9$ **เศษเหลือ คือ** 5

แต่พอหาผลบวกเลขโดดของ 3758 ให้ได้ผลบวกเลขโดดขั้นสุดท้ายเป็นตัวเลขโดดเพียงตัวเดียว ดังนี้ $3+7+5+8=23$ แต่ผลบวกยังไม่เป็นเลขโดดตัวเดียว ต้องหาผลบวกของ 23 ต่อ $2+3=5$ ได้เท่ากับ 5 พบว่า 5 เท่ากับเศษเหลือพอดี

ในทำนองเดียวกัน $4572\div 9$ **หาผลบวกเลขโดดของ** 4572 **คือ** $4+5+7+2=18\rightarrow 1+8=9$ แต่ 9 หารด้วย 9 ลงตัวเหลือเศษ 0 (ศูนย์)

พิสูจน์เชิงเลขคณิต จาก**นิยามการหาร** ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $a\div b=\frac{a}{b}$

ดังนั้น $3758\div 9=\frac{3758}{9}$ แต่ตัวตั้ง 3758 สามารถกระจายตามค่าประจำตำแหน่งของเลขฐาน 10 ได้

ดั้งนี้ $3758 = 3\times(1000)+7\times(100)+5\times(10)+8$

จากเงื่อนไขข้างต้น $3758\div 9 = \frac{3758}{9} = \frac{3\times(1000)+7\times(100)+5\times(10)+8}{9}$

$$= \frac{3\times(1000)}{9}+\frac{7\times(100)}{9}+\frac{5\times(10)}{9}+\frac{8}{9} \qquad \left(\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$= \frac{3\times(999+1)}{9}+\frac{7\times(99+1)}{9}+\frac{5\times(9+1)}{9}+\frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{3\times 999+3}{9}\right)+\left(\frac{7\times 99+7}{9}\right)+\left(\frac{5\times 9+5}{9}\right)+\frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{3\times 999}{9}+\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{7\times 99}{9}+\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{5\times 9}{9}+\frac{5}{9}\right)+\frac{8}{9}$$

$$= \left(333+\frac{3}{9}\right)+\left(77+\frac{7}{9}\right)+\left(5+\frac{5}{9}\right)+\frac{8}{9}$$

$$= 333+77+5+\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{5}{9}+\frac{8}{9}$$

ผลบวกเลขโดด

$$= 333+77+5+\frac{3+7+5+8}{9} = 333+77+5+\frac{23}{9} \qquad \text{แต่} \quad \frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}$$

$$= 333+77+5+2+\frac{5}{9} = 417+\frac{5}{9}$$

จากการ $3758\div 9$ เศษเหลือ คือ 5 และผลบวกเลขโดดของ 3758 $(3+7+5+8=23\rightarrow 2+3=5)$ ก็คือ 5

สรุปได้ว่า จำนวนเต็มใด ๆ ที่ถูกหารด้วยเก้า (9) **เศษเหลือจากการหารจำนวนเต็มนั้นด้วยเก้า สามารถหาได้จากผลบวกเลขโดดทุก ๆ ตัวของในจำนวนเต็มนั้น ๆ**

บทนิยาม 1 นวเศษ (Navasesh) ของจำนวนเต็มใด ๆ คือเศษเหลือที่ได้จากการหารจำนวนเต็มนั้นด้วยเก้า (9)

นวเศษ (Navasesh) **ของจำนวนเต็ม** I **เขียนแทนด้วย** N(I)

หมายเหตุ นวเศษ (Navasesh) มีความหมายในทฤษฎีจำนวนนั้นคือโมดุโลของเก้า (Modulo-Nine)

บทนิยาม 2 เลขโดด ในระบบฐานสิบ หมายถึงตัวเลขตัวเดียว ได้แก่ $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ และ 0

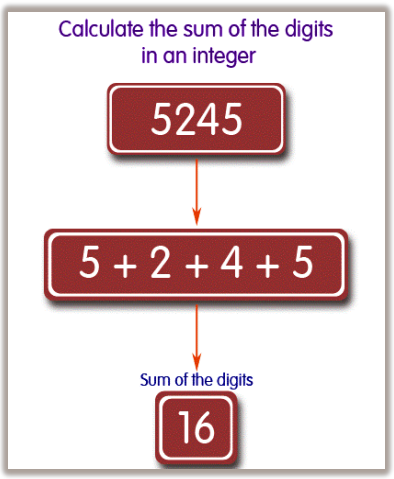
บทนิยาม 3 ผลบวกเลขโดดของจำนวนใด ๆ ที่สามารถหาผลบวกเลขโดดได้ คือผลเลขโดดทุก ๆ หลักของจำนวนนั้น ๆ ต้องมีค่าไม่มากกว่า 9 หรือผลบวกเลขโดดทุก ๆ หลักของจำนวนต้องมีผลบวกสุดท้ายเป็นตัวเลขโดดตัวเพียงตัวเดียว แต่ถ้าผลบวกยังมีผลลัพธ์เป็นเลขโดดมากกว่าหนึ่งตัวแล้วก็ให้หาผลบวกเลขโดดนั้นซ้ำอีกจนได้ผลบวกเลขโดดสุดท้ายเป็นตัวเลขตัวเพียงตัวเดียว

เช่น ผลบวกเลขโดดของ 17 หาได้จากผลบวก 1 และ 7 คือ $1+7=8$

ดั้งนั้นผลบวกเลขโดดของ 17 คือ 8

ผลบวกเลขโดดของ 123 คือ 6 เพราะว่า $1+2+3=6$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ 39 ผลบวกเลขโดดของ 39 เขียนแทนด้วย $39 \to 12 \to 3$



ผลบวกเลขโดดของ 5245 คือ $5+2+4+5=16$ แต่ 16 ยังไม่เป็นเลขโดดหรือมีค่ามากกว่า 9 จะต้องหาผลบวกเลขโดดของ 16 ต่ออีก คือ $1+6=7$ ดังนั้นผลบวกเลขโดดของ 5245 เท่ากับ 7 **เขียนแทนด้วย** $5245 \to 16 \to 7$

หมายเหตุ ผลบวกเลขโดดภาษาสันสกฤต คือพีชางกะ (बीजांक = Beejank = digit sum)

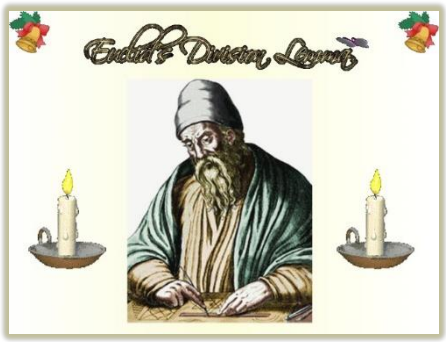
กฎของนวเศษ

ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

1. $N(a+b+c) = N[N(a)+N(b)+N(c)]$
2. $N(a \times b) = N[N(a) \times N(b)]$
3. $N(a-b) = N[N(a)-N(b)]$
4. $N(-a) = 9 - N(a)$
5. $N(9) = N(0)$
6. ถ้า a หารด้วย b แล้วผลหาร q เศษเหลือ r

$$N(a) = N(q \times b) + N(r) = N\big(N(q) \times N(b)\big) + N(r)$$

พิสูจน์ จากบทแทรกการหารของยุคลิด (Euclid's division lemma)



ในวิชาเลขคณิต (Arithmetic)

สำหรับจำนวนเต็ม a และ d ใด ๆ จะต้องมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวที่ทำให้ $a = dq + r$ และ $0 \le r < |d|$ ขั้นตอนการหารกล่าวถึงผลลัพธ์จากการหารของจำนวนเต็มไว้อย่างเที่ยงตรง ที่สำคัญขั้นตอนการหารยืนยันว่าจำนวนเต็มที่เรียกว่าผลลัพธ์ q (quotient) และ เศษเหลือ r (remainder) มีอยู่เสมอและมีเพียงค่าเดียวสำหรับตัวตั้ง a และตัวหาร d โดยที่ $d \neq 0$

จากสมการการหาร $a = dq + r$ และ $0 \le r < |d|$

ดังนั้น $N(a) = N(q \times b) + N(r) = N\big(N(q) \times N(b)\big) + N(r)$

ตัวอย่างนวเศษของจำนวนเต็มใด ๆ

เช่น นวเศษของ 317 เขียนแทนด้วย $N(317) = N(3+1+7) = N(11) = N(1+1) = N(2) = 2$

นวเศษของ 437 เขียนแทนด้วย $N(437) = N(4+3+7) = N(14) = N(1+4) = N(5) = 5$

ตัวอย่างวิธีการคิดนวเศษ

กรณีที่ 1 นวเศษของจำนวนที่มีหลักเดียวคือตัวเลขนั้นเลย เช่น

$$N(5) = 5$$

กรณีที่ 2 นวเศษของจำนวนที่มีมากกว่าหนึ่งตัวคือผลบวกของเลขโดดแต่ละหลัก เช่น

$$N\big(52\big) = N\big(5+2\big) = N\big(7\big) = 7$$

$$N(68) = N(6+8) = N(14) = N(1+4) = N(5) = 5$$

$$N\big(234\big) = N\big(2+3+4\big) = N\big(9\big) = 9$$

แต่นวเศษ คือเศษเหลือที่ได้จากการหารจำนวนเต็มด้วย 9 ดังนั้นเมื่อเศษเหลือคือ 9 เมื่อดำเนินการหารต่อด้วย 9 จะได้ผลหารเป็น 1 เหลือเศษเป็นศูนย์ (0)

ดังนั้น $N\big(234\big) = N\big(2+3+4\big) = N\big(9\big) = 9 = N(0) = 0$

กรณีที่ 3 นวเศษของสองจำนวนบวกกัน เช่น $43 + 25 = 68$

หา $N(43+25) = N\big(N(43) + N(25)\big) = N\big(N(4+3) + N(2+5)\big) = N(N(7) + N(7)) = N(7+7)$

$$= N(14) = N(1+4) = N(5) = 5$$

และหานวเศษของ $N(68) = N(6+8) = N(14) = N(1+4) = N(5) = 5$

เพราะฉะนั้น $N(63+25) = N(68)$

แสดงว่า 'นวเศษของแต่ละจำนวนที่บวกกันจะต้องเท่ากับนวเศษของผลบวกทุกจำนวนนั้น ๆ'

กรณีที่ 4 นวเศษของสองจำนวนลบกัน เช่น $63 - 19 = 44$

หา $N(63-19) = N\big(N(63) - N(19)\big) = N\big((6+3) - N(1+9)\big) = N\big(N(9) - N(10)\big)$

$$= N\big(N(9) - N(1+0)\big) = N(9-1) = N(8) = 8$$

และหา $N\big(44\big) = N\big(4+4\big) = N\big(8\big) = 8$

หรือในกรณีการลบมีค่าติดลบ เช่น $49 - 82 = -33$

ดังนั้น $N(49-82) = N\big(N(49) - N(82)\big) = N\big(N(4+9) - N(8+2)\big) = N\big(N(13) - N(10)\big)$

$$= N\big(N(1+3) - N(1+0)\big) = N(4-1) = N(3) = 3$$

แต่ $N(-33) = 9 - N(33)) = 9 - N(3+3) = 9 - 6 = 3$ ตามกฎข้อที่ 4.

กรณีที่ 5 นวเศษของสองจำนวนคูณกัน เช่น $12\times4=48$

นวเศษของ $N(12\times4)=N\big(N(12)\times N(4)\big)=N\big(N(1+2)\times N(4)\big)$

$=N(3\times4)=N(12)=N(1+2)=N(3)=3$

และนวเศษผลคูณ $N(48)=N(4+8)=N(12)=N(1+2)=N(3)=3$

กรณีที่ 6 นวเศษของสองจำนวนหารกัน เช่น $123\div5=24$ เศษเหลือ 3

จากบทแทรกการหารของยุคลิด $123=24\times5+3$

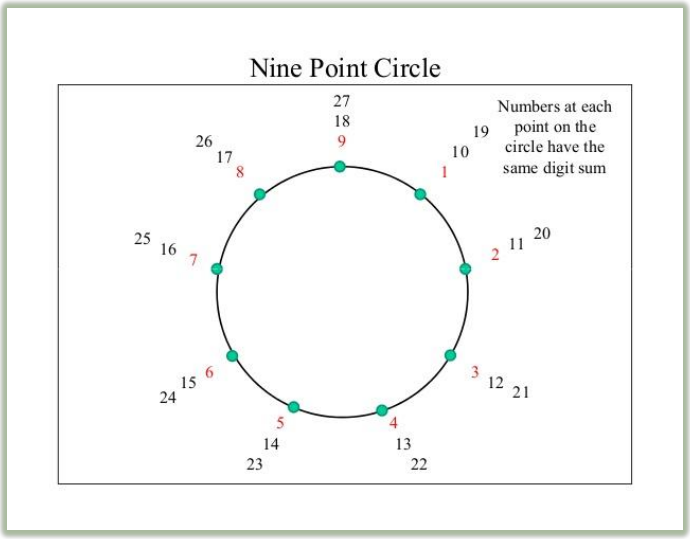
จากกำข้อที่ 6 ของนวเศษ $N(123)=N\big(N(24)\times N(5)\big)+N(3)$

$N(1+2+3)=N\big(N(2+4)\times N(5)\big)+N(3)$

$N(6)=N\big(N(6)\times N(5)\big)+N(3)$

$6=N\big(6\times5\big)+N(3)=N\big(30\big)+N(3)=N(3+0)+N(3)=3+3=6$

หมายเหตุ วงกลมเก้าจุด จำนวนในแต่ละจุดบนวงกลมจะมีผลบวกเลขโดดเท่ากัน ดังรูป



1.2 การคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

การคัดออกเก้าเป็นเทคนิควิธีของการหาเศษเหลือจากการหารจำนวนเต็มบวกใด ๆ ด้วยเก้า ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เพราะ 0 และ 9 มีสมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการหาผลบวกเลขโดดของจำนวนใด ๆ

ศูนย์ (0) มีสมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวกอยู่แล้ว เช่น

30 มีผลบวกเลขโดด คือ $3+0=3$ ดังนั้นแทนที่จะหาผลบวกเลขโดดด้วยวิธีตรง ๆ เราก็คัดหรือตัด 0 ออกได้เลยดังนี้ $\cancel{30} \rightarrow 3$

หรือ $300 \rightarrow 3+0+0 \rightarrow 3$ คัด $0,0$ ออกได้เลย $\cancel{300} \rightarrow 3$ เป็นต้น

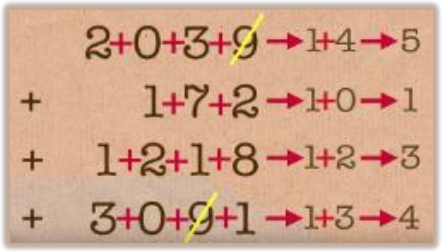
เก้า (9) **มีสมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวกเลขโดดของจำนวนใด ๆ**

สามารถหาผลบวกเลขโดดได้ เช่น 19 มีผลบวกเลขโดดคือ $1+9=10$ แต่ผลบวกเลขโดดยังมีค่ามากกว่า 8 ยังต้องหาผลลบวกเลขโดดต่อ คือ $1+0=1$

ดังนั้นผลบวกเลขโดดของ 19 คือ 1 แทนที่จะหาผลบวกเลขโดดด้วยวิธีตรง ๆ เราก็คัดหรือตัด 9 ออกได้เลยดังนี้ $1\cancel{9} \rightarrow 1$

39 มีผลบวกเลขโดดคือ $3+9=12 \rightarrow 12 \rightarrow 1+2 \rightarrow 3$ จะเห็นได้ชัดเจนว่าคัด 9 หรือตัด 9 ออกได้เลย $3\cancel{9} \rightarrow 3$

หรือ $399 \rightarrow 3+9+3 \rightarrow 21 \rightarrow 2+1 \rightarrow 3$ คัด $9,9$ ออกได้เช่นเดียวกัน $\cancel{399} \rightarrow 3$



บทนิยาม 3 การคัดออกเก้า (Casting Out Nines) เป็นวิธีเทคนิควิธีแทนการหาผลบวกเลขโดดของจำนวนใด ๆ ด้วยการคัดเลข 9 หรือผลบวกเลขโดดสามารถรวมกันได้เท่ากับ 9 ที่มีอยู่ในจำนวนนั้นออกจนผลการคัดออกสุดท้ายมีค่าไม่มากกว่า 8 หรือตัวเลขเพียงตัวเดียว

ตัวอย่างที่ 1 หาผลบวกเลขโดดของจำนวนต่อไปนี้ 3949

วิธีทำ โดยวิธีปกติ หาผลบวกเลขโดดคือ $3+9+4+9=25 \rightarrow 2+5=7$

โดยวิธีคัดออกเก้า จาก 3949 คัดเลข 9 ทั้งสองตัวออกได้เลย

$3\ \cancel{9}\ 4\ \cancel{9}$ เหลือ 3 เลข 4 กับ ดังนั้น $3+4=7$

ตัวอย่างที่ 2 หาผลบวกเลขโดดของ 4379348568219

วิธีทำ **ขั้นที่ 1** พิจารณาถ้าในจำนวนนั้นมีเลข 9 อยู่ ให้คัดออกก่อน

$4\ \ 3\ \ 7\ \ \cancel{9}\ \ 3\ \ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 6\ \ 8\ \ 2\ \ 1\ \ \cancel{9}$

ขั้นที่ 2 พิจารณาตัวเลข 2 ตัว ขึ้นไปบวกกันได้ 9 ให้คัดออกเช่นกัน

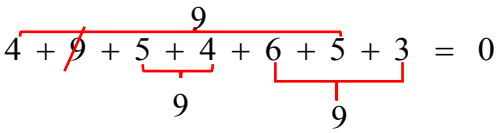
$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \textcircled{7}\ \cancel{9}\ \textcircled{3}\ \ 4\ \ \boxed{8}\ \ 5\ \ \textcircled{6}\ \ \textcircled{8}\ \ \textcircled{2}\ \ \textcircled{1}\ \ \cancel{9}$

พบว่า $3+6=8+1=4+5=7+2=9$ คัดออกได้ ตัวเลขที่เหลือหาผลบวก $4+3+8=15 \rightarrow 1+5=6$

ดังนั้น ผลบวกเลขโดดของ 4379348568219 เท่ากับ 6

ตัวอย่างที่ 3 หาผลบวกเลขโดดของ 4954653

วิธีทำ ผลบวกเลขโดดของ 4954653 โดยวิธีคัดออกเก้า



นอกจากนี้ยังมีสมบัติอื่น ๆ เช่น

- แสดงค่าที่น้อยที่สุดของผลบวกกำลังสามของสองจำนวนแรกของจำนวนนับ คือ $1^3+2^3=9$
- ผลคูณจำนวนใด ๆ ที่ถูกคูณด้วย 9 ถึงจะมีค่ามากก็ตาม ผลบวกเลขโดดของผลคูณจำนวนใด ๆ นั้นจะเป็นเก้าเสมอ

  ตัวอย่างเช่น ก) $123\times9=1107$ ผลบวกเลขโดดของ 1107 คือ $1+1+0+7=9$

  ข) $459873\times9=4138857$ ผลบวกเลขโดดของ 4138857 คือ

  $4+1+3+8+8+5+7=36 \rightarrow 3+6=9$
- รูปแบบอื่นของ 9

$\frac{1}{9}=0.1111....$ $\frac{2}{9}=0.2222....$ $\frac{3}{9}=0.3333....$

$\frac{4}{9}=0.4444....$ $\frac{5}{9}=0.5555....$ $\frac{6}{9}=0.6666....$

$\frac{7}{9}=0.7777....$ $\frac{8}{9}=0.8888....$ $\frac{9}{9}=0.9999....$

แบบฝึกหัดชุดที่ 5

จงหาผลบวกตัวเลขโดดของจำนวนต่อไปนี้

จำนวนเต็ม	ผลบวกของเลข	จำนวนเต็ม	ผลบวกของเลขโดด
465		2346	
274		16271	
3335		9653	
6139		36247	
2561		215841	
891		7125	
723		9821736	

1.3 การยันความถูกต้องของการคำนวณด้วยวิธีคัดออกเก้า

เนื่องจากสมบัติจำนวนใด ๆที่สามารถหาผลบวกเลขโดดได้ ถูกการหารด้วยตัวหารเก้า (9) แล้วพบว่าเศษเหลือที่เก้าหารจำนวนนั้นจะเท่ากับผลบวกเลขโดดของจำนวนนั้นด้วย และการหาผลบวกเลขโดดก็หาได้ง่ายรวดเร็วด้วยวิธีคัดออกเก้า จึงนำมาประยุกต์ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องในการบวก ลบ คูณและหารได้ โดยไม่ต้องตรวจสอบด้วยการตรวจซ้ำ ๆ แบบวิธีดั้งเดิม เรียกวิธีการนี้ว่า **“การยันความถูกต้อง (Cross-Checked)”**

1.3.1 การตรวจสอบยันความถูกต้องสำหรับการบวก

ตัวอย่างที่ 1 หาผลบวกของ $32+12$ และตรวจคำตอบด้วยวิธีการยันความถูกต้อง

วิธีทำ

			ผลบวกเลขโดด
ตัวตั้ง	3 2	$\rightarrow 3+2=5$	5
ตัวบวก	$\underline{1\ 2}$ +	$\rightarrow 1+2=3$	$\underline{3}$ +
ผลลัพธ์	$\underline{\underline{4\ 4}}$	$\rightarrow 4+4=8$	$\underline{\underline{8}}$ **คำตอบ** คือ 44 ถูกต้อง

วิธีการยันความถูกต้องของคำตอบการบวก ว่าการบวกนั้นถูกต้องหรือไม่มีขั้นตอนดังนี้

1. หาผลบวกตัวเลขของสองจำนวนที่นำมาบวกกันคือ 32 ผลบวกเลขโดดคือ $3+2=5$

   และ 12 ผลบวกเลขโดดคือ $1+2=3$

   และคำตอบ 44 ผลบวกเลขโดดคือ $4+4=8$

2. ยันความถูกต้องด้วยการนำมาจากผลบวกเลขโดดของของสองจำนวนที่นำมาบวกกันนั้นคือ 5 กับ 3 บวกกันได้ 8 ซึ่งได้เท่ากับผลบวกเลขโดดของคำตอบ คือ $4+4=8$ แสดงว่า คำตอบถูกต้อง

แต่เนื่องจากการหาผลบวกเลขโดดที่กล่าวข้างต้นสามารถใช้วิธีการคัดอออกเก้าแทนได้ดังตัวอย่างที่แสดงวิธีการได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 หาผลบวกของ 93615 กับ 18209 และตรวจคำตอบด้วยวิธียันความถูกต้อง

วิธีทำ ใช้วิธีคัดออกเก้า เพื่อความรวดเร็วในการคิดเลข

ผลบวกเลขโดดด้วยการคัดออกเก้า

~~9~~ 3 ~~6~~ 1 5	6	**ตัวตั้ง** คัด 9 และ $3+6=9$ ออก เหลือ $1+5=6$
~~1~~ ~~8~~ 2 ~~0~~ ~~9~~ +	$\underline{2}$ +	**ตัวบวก** คัด 9,0 และ $1+8=9$ ออก เหลือ 2
0 1 8 1 4 = 1 1 ~~1~~ ~~8~~ 2 4	$\underline{\underline{8}}$	**คำตอบ** คัด 9 ออก เหลือ $1+1+1+8+2+4=8$
1 1 0 0 1		

แสดงวิธีทำอย่างสั้น

~~9~~ 3 ~~6~~ 1 5 +	$\rightarrow$	6 +
~~1~~ ~~8~~ 2 ~~0~~ ~~9~~	$\rightarrow$	$\underline{2}$
0 1 8 1 4 = 1 1 ~~1~~ ~~8~~ 2 4	$\rightarrow$	$\underline{\underline{8}}$
1 1 0 0 1		

ตัวอย่างที่ 3 หาผลบวกของ 279 กับ 121 และตรวจคำตอบด้วยการคัดออกเก้า

วิธีทำ การยันความถูกต้อง (การคัดออกเก้า)

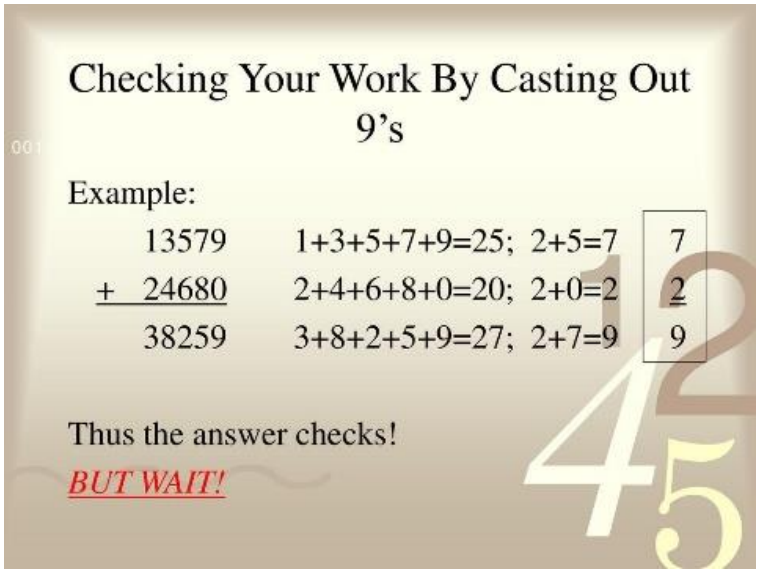
$$\begin{array}{rcl} 2\cancel{7}\cancel{9} & & 0 \\ 1\ 2\ 1 & + & \underline{4} \\ \underline{4\ 0\cancel{9}} & & \underline{4} \end{array} \quad + \quad +$$

1. เราได้คำตอบ 409
2. หาผลบวกเลขโดดของ 279 โดยการคัดออกเลข 9 คือ 0

   121 ผลบวกเลขโดด คือ 4
3. หาผลบวกของ 0 และ 4 ได้ 4
4. ผลบวกเลขโดดของคำตอบ 409 คือ 4 โดยการตัดออกเลข 9

   ซึ่งสอดคล้องกับ 4 ในการยันความถูกต้อง (0 + 4 = 4)

ตัวอย่างที่ 4 ตรวจสอบคำตอบของ 13579 + 24680 ด้วยวิธีคัดออกเก้า



$$\begin{array}{rcl} \rightarrow\ \cancel{1}\ 3\ 5\ 7\ \cancel{9} & & 7 \\ \rightarrow\ 2\ \cancel{4}\ \cancel{6}\ \cancel{8}\ 0 & + & \underline{2} \\ \underline{\cancel{3}\ \cancel{8}\ 2\ \cancel{5}\ 9} & & \underline{9} \end{array} \quad + \quad +$$

สรุปขั้นตอนการคิดดังนี้

1. หาผลบวกเลขโดดของตัวตั้งและตัวบวก ด้วยวิธีคัดออกเก้า
2. หาผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์ของเลขสองจำนวนที่นำมาบวกกัน (ในข้อ 1)
3. นำผลบวกเลขโดดของตัวตั้งไปบวกกับผลบวกเลขโดดของตัวที่นำมาบวก แล้วถ้าผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์นี้เท่ากับผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์ของเลขสองจำนวนที่นำมาบวกกันนั้น (ในข้อ 2) แสดงว่าคำตอบในการบวกเลขสองจำนวนนั้นถูกต้อง และในทางตรงข้ามก็แสดงว่าคำตอบไม่ถูกต้อง

1.3.2 การตรวจสอบยันความถูกต้องของการลบ

ตัวอย่างที่ 1 ตรวจสอบว่า $4127-2376=1751$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ คัดออกเก้าของตัวตั้งและตัวลบ

$$\begin{array}{lll} 4\ 1\ \cancel{2}\ \cancel{7} & \rightarrow 4+1 & 5 \\ \underline{\cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{7}\ \cancel{6}} & \rightarrow\ 0 & \underline{0} \\ \underline{\underline{\cancel{1}\ 7\ 5\ \cancel{1}}} & \rightarrow\ 5 & \underline{\underline{5}} \end{array}$$

แสดงว่าถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2 ตรวจสอบว่า $65451-48769=16682$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ คัดออกเก้า ของตัวตั้งและตัวลบ

$$\begin{array}{lll} \cancel{6}\ \cancel{5}\ 4\ \overset{-2}{5}\ \cancel{1} & & 3 \\ \underline{\cancel{4}\ \cancel{8}\ 7\ \cancel{6}\ \cancel{9}} & & \underline{7} \\ \underline{\underline{\cancel{1}\ \overset{-1}{6}\ \cancel{6}\ \cancel{8}\ \cancel{2}}} & \rightarrow\ 5 & \underline{\underline{-4}} \end{array}$$

ในกรณีการคัดออกเก้ามีค่าเป็นลบ เนื่องจากการหารเศษเหลือต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้นจะต้องนำ 9 มาบวกกับเศษเหลือที่เป็นจำนวนลบเพื่อให้เศษเหลือมีค่าเป็นบวกตามขั้นตอนการหารของยุคลิด

ดังนั้น $65451-48769\rightarrow 3-7=-4$

เพราะฉะนั้น $65451-48769\rightarrow 3-7=-4\rightarrow -4+9=5$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $35567-11828$ และตรวจสอบผลเฉลยยันความถูกต้อง

วิธีทำ

การตรวจสอบยันความถูกต้อง

$$\begin{array}{lll} \cancel{3}\ \cancel{5}\ \cancel{5}\ \cancel{6}\ 7 & & 8 \\ \underline{1\ 1\ \ \cancel{8}\ \cancel{2}\ \cancel{8}} & & \underline{2} \\ \underline{\underline{\cancel{2}\ 3\ \cancel{7}\ 3\ \cancel{9}}} & \rightarrow 6 & \underline{\underline{6}} \end{array}$$

สรุป ใช้การคัดออกเก้ายันความถูกต้องเป็นจริง

1.3.3 การตรวจสอบยันความถูกต้องของการคูณ

ตัวอย่างที่ 1 ตรวจสอบว่า $243\times257=62451$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ คัดออกเก้าของตัวตั้งและตัวคูณ

$243\rightarrow\ 9\rightarrow0$

$257\rightarrow\ 5$ ดังนั้น $243\times257\rightarrow0\times5=0$

คัดออกเก้าของคำตอบ $62451\rightarrow0$ คำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2 ตรวจสอบว่า $4672\times3469=16207168$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ คัดออกเก้าของตัวตั้งและตัวคูณ

$4672\rightarrow\ 1$

$3469\rightarrow\ 4$ ดังนั้น $4672\times3469\rightarrow1\times4=4$

คัดออกเก้าของตอบ $16207168\rightarrow4$ ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ 87614×3 และตรวจสอบผลเฉลยยันความถูกต้อง

วิธีทำ

การยันความถูกต้อง

$$\begin{array}{r} 8\ 7\ 6\ 1\ 4 \\ \times\quad\quad\ 3 \\ \hline 2\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2 \end{array}$$

$4\ 1\ 8\ 3$

$=262842$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 3 \\ \hline 24 \end{array}\rightarrow6$$

ผลบวกเลขโดดของ 262842 ผลบวกเลขโดด เท่ากับ 6

$18\rightarrow9\rightarrow0$

สรุป ใช้การคัดออกเลขเก้าตรวจสอบยันความถูกต้องเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4 หาผลคูณของ 84791247 ด้วย 25 และตรวจสอบยันความถูกต้อง

วิธีทำ เขียนศูนย์สองตัวที่ท้ายเลข 84791247 ได้ผลลัพธ์เป็น 8479124700

หาร 8479124700 ด้วย 4 $=8479124700\div4=2119781175$

ดังนั้น $84791247\times25=2119781175$

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

ตัวตั้ง $84791247\rightarrow6$

ตัวคูณ $25\rightarrow7$

คำตอบ $=2119781175\rightarrow6$

ดังนั้น $7\times6=42\rightarrow6$

1.3.4 การตรวจสอบยันความถูกต้องของการหาร

การยันความถูกต้องของการหาร ต้องใช้สมการจากขั้นตอนการหาร

ตัวตั้ง = ตัวหาร x ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

ตัวอย่างที่ 1 แสดงผลเฉลยการหารถูกต้องของ $671 \div 4 = 167 + \frac{3}{4}$ ด้วยวิธีคัดออกเก้า

วิธีคิด จากสมการขั้นตอนการหาร

กำหนดให้ ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

$$671 = 167 \times 4 + 3$$

LHS = RHS

คัดออกเก้า สำหรับตัวตั้ง $671 \to 5$

สำหรับตัวหาร $4 \to 4$

สำหรับผลลัพธ์ $167 \to 5$

สำหรับเศษเหลือ $3 \to 3$

RHS = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ $= 167 \times 4 + 3 \to 4 \times 5 + 3 \to 2 + 3 \to 5$

LHS = ตัวตั้ง = 5 ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

วิธีทำ จากสมการขั้นตอนการหาร

ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

$$671 = 4 \times 167 + 3$$

จากวิธีการคัดออกเก้า $5 = 4 \times 5 + 3$

$$5 = 20 + 3 \to 5$$

หรือจากตัวอย่างที่ 1 กรณีผลหารเป็นทศนิยม $671 \div 4 = 167.75$

กำหนดให้ ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์

$$671 = 167.75 \times 4$$

LHS = RHS

คัดออกเก้าสำหรับตัวตั้ง $671 \to 5$

สำหรับตัวหาร $4 \to 4$

สำหรับผลลัพธ์ $167.75 \to 8$

จากสมการขั้นตอนการหาร RHS = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ $= 4 \times 8 = 32 \to 5$

LHS = ตัวตั้ง = 5 ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

วิธีทำ จากสมการขั้นตอนการหาร

$$\text{ตัวตั้ง} = \text{ตัวหาร} \times \text{ผลลัพธ์}$$

$$671 = 4 \times 167.75$$

จากวิธีการคัดออกเก้า $5 = 4 \times 8 \rightarrow 32 \rightarrow 5$

หมายเหตุ

Why Casting Out Nine Works—Why Casting Out Elevens Works

การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบในการคำนวณด้วยวิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines) จะมีปัญหา อันเนื่องจากอันดับของตัวเลขโดดในแต่ละหลักของจำนวนต่างกันแต่ผลบวกตัวเลขทุก ๆ หลักมีค่าเท่ากัน ดังตัวอย่างนี้

ผลบวกเลขโดดของ $634 \rightarrow 6+3+4=4$

ผลบวกเลขโดดของ $463 \rightarrow 4+6+3=4$

ผลบวกเลขโดดของ $643 \rightarrow 6+4+3=4$

ด้วยเหตุผลข้างต้นนักคณิตศาสตร์พบวิธีแก้ปัญหาด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens) คือ กล่าวคือ “วิธีการคัดออกสิบเอ็ดเหมาะกับการคำนวณที่จำนวนที่นำมาคิดเลขมีค่ามาก ๆ หรือประกอบด้วยเลขโดดหลาย ๆ หลัก ถ้าอันดับของตัวเลขโดดในแต่ละจำนวนต่างกันจะได้ผลบวกเลขโดดต่างกันทันที นั่นหมายความว่าวิธีการคัดออกสิบเอ็ดใช้ได้ดีกว่าวิธีการคัดออกเก้า

แต่ก่อนที่จะศึกษาการตรวจสอบคำตอบถูกต้องของการคำนวณด้วยการยันความถูกต้อง ด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ด นั้นจะกล่าวสมบัติการหารจำนวนใดด้วยสิบเอ็ดเสียก่อน ดังต่อไปนี้

1.4 เศษเหลือของจำนวนที่ถูกหารด้วยสิบเอ็ด (11)

แต่ก่อนที่เราจะศึกษาการคัดออกสิบเอ็ด จะต้องศึกษามีสมบัติของ 11 สำหรับการหารจำนวนใด ๆ เสียก่อนเพื่อความเข้าถึงเศษเหลือของการหารนั้น จากความรู้ทฤษฎีทวินาม (Binomial Theorem)

พิจารณา $(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)^4=(a+(-b))^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

$(a-b)^5=(a+(-b))^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

สังเกต ทวินามที่ยกกำลังคู่เมื่อกระจายแล้วพจน์สุดท้ายจะมีเครื่องหมายเป็นบวก ในทางตรงข้าม

ทวินามที่ยกกำลังคี่เมื่อกระจายแล้วพจน์สุดท้ายจะมีเครื่องหมายเป็นลบ

ต่อมาลองพิจารณา จำนวนสองจำนวนนี้ 3758 และ 50292 เมื่อเรากระจายให้อยู่ในรูปของค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสิบจะได้รูปแบบดังนี้

$3758=3\cdot(10)^3+7\cdot(10)^2+5\cdot(10)+8$

$58454=5\cdot(10)^4+8\cdot(10)^3+4\cdot(10)^2+5\cdot(10)+4$ แทน 10 ด้วย $(11-1)=10$

$3758=3\cdot(11-1)^3+7\cdot(11-1)^2+5\cdot(11-1)+8$

$58454=5\cdot(11-1)^4+8\cdot(11-1)^3+4\cdot(11-1)^2+5\cdot(11-1)+4$

เมื่อพิจารณา $(11-1)^3=11^3-3\cdot11^2+3\cdot11-1$ ถ้านำ 11 หารจำนวนนี้แล้ว เศษเหลือจะเท่ากับ -1

$(11-1)^4=11^4-4\cdot11^3+6\cdot11^2-4\cdot11+1$ แต่ถ้านำ 11 หารจำนวนนี้ เศษเหลือจะเท่ากับ $+1$

ดังนั้น ถ้าพิจารณาอย่างละเอียดแล้วถ้านำ $3758\div11$ **แล้วเศษเหลือจะเท่ากับ** $-3+7-5+8=7$

และในทำนองเดียวกัน ถ้านำ $58454\div11$ **แล้วเศษเหลือจะเท่ากับ** $5-8+4-5+4=0$

วิธีตั้งหาร

```
      341
   ---------
11 ) 3758
       33
       ---
        45
        44
        --
         18
         11
         --
          7
```

```
      5314
   ----------
11 ) 58454
       55
       --
        34
        33
        --
         15
         11
         --
          44
          44
          --
           0
```

สรุป การหาเศษเหลือของจำนวนใด ๆ ที่หารด้วย 11 นั้นเป็นดังนี้

- แบ่งตัวเลขของจำนวนที่จะถูกหารด้วย 11 นั้น ออกเป็นสองส่วนคือเลขโดดตำแหน่งหลักคี่กับเลขโดดตำแหน่งหลักคู่ แล้วหาผลบวกเลขโดดของตำแหน่งหลักคู่ กับ ผลบวกเลขโดดของตำแหน่ง
- หลักคี่ (<u>การนับเริ่มตำแหน่งคี่ที่หลักหน่วย</u>)
- นำผลบวกเลขโดดของตำแหน่งหลักคี่ <u>ลบ</u> ด้วยผลบวกเลขโดดของตำแหน่งหลักคู่ ถ้าผลต่างของผลบวกข้างต้นนั้นเป็น 0 หรือ 11 หรือพหุคูณของ 11 แล้วแสดงว่า จำนวนนั้น 11 หารลงตัวในทางตรงข้ามผลต่างของผลบวกข้างต้นนั้นไม่ได้ 0 หรือ 11 หรือพหุคูณของ 11 แสดงว่าจำนวนนั้น 11หารไม่ลงด้วย และผลต่างของผลบวกตัวเลขหลักคู่กับตัวเลขหลักคี่ก็จะเป็นเศษเหลือของการหารด้วย 11 นั้นอีกด้วย
- ในกรณีหาผลต่างของผลบวกตัวเลขของตำแหน่งหลักคี่กับผลบวกตัวเลขของตำแหน่งหลักคู่ มีค่าเป็นจำนวนลบ ซึ่งจำนวนที่หารด้วย 11 เศษเหลือเป็นจำนวนลบ ปกติเศษเหลือต้องเป็นจำนวนบวกตามขั้นตอนการหาร ให้นำเป็นเศษเหลือที่เป็นจำนวนลบบวกกับ 11 อีกครั้งจนได้เป็นจำนวนบวกก็จะเป็นเศษเหลือของการหารนั้น

ตัวอย่างที่ 1 แสดงว่า 14641 ถูกหารด้วย 11ลงตัว

วิธีทำ หาผลบวกเลขโดดตำแหน่งหลักคี่ $=1+6+1=8$ (หลักที่ 1,3,5)

หาผลบวกเลขโดดตำแหน่งหลักคู่ $=4+4=8$ (หลักที่ 2,4)

ผลต่างของผลบวกเลขโดดหลักคู่กับหลักคี่ข้างต้น $=8-8=0$

ดังนั้น 14641 ถูกหารด้วย 11 ลงตัว เขียนแทนด้วย $11|14641$

วิธีลัดทำได้ดังนี้ - เขียนตัวเลขสลับลำดับกลับกันจากหลังสุดไปหน้าสุดของตัวเลขจำนวนนั้น

- ใส่เครื่องหมาย (+) กับตัวเลขตำแหน่งหน้าสุดแล้วใส่เครื่องหมาย (−) กับตัวเลขหลักถัดไปโดยสลับกันไปเช่นนี้
- หาผลบวกตัวเลขทุกตำแหน่งที่คิดเครื่องหมายข้างต้นด้วยวิธีปกติ
- ในกรณีที่ผลบวกเป็นจำนวนลบแต่เศษเหลือต้องเป็นจำนวนบวกตามขั้นตอนการหาร ให้บวก 11 กับเศษเหลือจำนวนลบนั้นให้เป็นเศษเหลือจำนวนบวก

ดังนั้นผลบวกเลขโดด 11 ของ $14641: -1+4-6+4-1=0$

ตัวอย่างที่ 2 หาเศษเหลือของ 542781192 ถูกหารด้วย 11 มีค่าเท่าไร

วิธีทำ สลับลำดับตัวเลขหลังสุดกับตัวหน้าสุดโดยเรียงลำดับดังนี้

$542781192: 2,9,1,1,8,7,2,4,5$

แล้ว แสดงการหาผลบวกของตัวเลขแต่ละหลักโดยตัวหน้าสุดใส่เครื่องหมายบวกแล้วตัวเลขหลักถัดไปใส่เครื่องหมายลบสลับกันไปจนถึงตำแหน่งสุดท้าย ดังนี้

$542781192: \quad 2-9+1-1+8-7+2-4+5=-3$

พบว่าผลบวกเป็นจำนวนลบแล้วให้บวก 11 กับ -3 ดังนั้น $-3+11=8$

แสดงว่า 11 หาร 542781192 เหลือเศษ 8

ตัวอย่างที่ 3 หาเศษเหลือของ 382745 ถูกหารด้วย 11 มีค่าเท่าไร

วิธีทำ สลับหลักตัวเลขของ 382745 แล้วผลบวกของ 382745

$$382745 \quad +5-4+7-2+8-3=20-9=11$$

ผลบวกท่ากับ 11 แสดงว่า 11 หาร 382745 ลงตัว หรือเศษเหลือเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 4 หาเศษเหลือของ 3987 ถูกหารด้วย 11 มีค่าเท่าไร

วิธีทำ สลับหลักตัวเลขของ 3987 แล้วผลบวกคิดเครื่องหมายแต่ละหลักของ 3987

$$3987:7-8+9-3=5$$

ผลบวกท่ากับ 5 ดังนั้นแสดงว่า 11 หาร 3987 ไม่ลงตัว เศษเหลือเท่ากับ 5

1.5 การตรวจสอบยันความถูกต้องด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ด

เนื่องจากการยันความถูกต้องด้วยวิธีคัดออกเก้ามีปัญหาในกรณีที่ผลบวกเลขโดดเท่ากันของจำนวนที่ไม่เท่ากัน เช่น $125,152,215,251,512$ และ 521

พบว่าจำนวนข้างต้นมีตัวเลขเหมือนกันแต่เขียนสลับหลักกัน หาผลบวกเลขโดดเท่ากันคือ 8 นี่คือข้อบกพร่องของวิธีการคัดออกเก้า การคัดออกสิบเอ็ดสามารถแก้ปัญหานี้ได้

1.5.1 การตรวจสอบยันความถูกต้องสำหรับการบวก

ตัวอย่างที่ 1 ตรวจสอบว่า $2415+289=2794$ ถูกต้องหรือไม่ ด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ด

วิธีทำ ตัวตั้ง $2415: \ 5-1+4-2=6$

ตัวบวก $289: \ 9-8+2=3$

ผลลัพธ์ $2794:4-9+7-2=0$

แต่ผลบวกเลขโดดของตัวตั้งและตัวบวก ในที่นี้ $6+3=9$ ไม่เท่ากับผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์ คือ 0

ดังนั้น $2415+289\neq 2794$ ไม่ถูกต้อง

เพราะฉะนั้นต้องหาผลบวกใหม่ คือ $2415+289=2704$ **แล้วตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ**

วิธีทำ ตัวตั้ง $2415: \ 5-1+4-2=6$

ตัวบวก $289: \ 9-8+2=3$

ผลลัพธ์ $2704:4-0+7-2=9$

ผลบวกเลขโดดของตัวตั้งและตัวบวก ในที่นี้ $6+3=9$ เท่ากับผลบวกเลขโดดของผลลัพธ์ คือ 9

ดังนั้น $2415+289=2704$ ถูกต้อง

หมายเหตุ ความแตกต่างพื้นฐานระหว่างวิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines) กับการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens) คือ วิธีการคัดออกสิบเอ็ดเหมาะกับการคำนวณที่จำนวนที่นำมาคิดเลขมีค่ามาก ๆ หรือประกอบด้วยเลขโดดหลาย ๆ หลัก ส่วนวิธีการคัดออกเก้าจะมีปัญหา อันเนื่องจากอันดับของตัวเลขโดดในแต่ละจำนวนต่างกันแต่ผลบวกตัวเลขเท่ากัน แต่ในขณะที่วิธีการตัดออกสิบเอ็ด ถ้าอันดับของตัวเลขโดดในแต่ละจำนวนต่างกันจะได้ผลบวกเลขโดดต่างกันทันที นั่นหมายความว่าวิธีการคัดออกสิบเอ็ดใช้ได้ดีกว่าวิธีการคัดออกเก้า ดังตัวอย่างนี้

	วิธีการคัดออกเก้า	**วิธีการคัดออกสิบเอ็ด**
ผลบวกเลขโดดของ	$634 \to 6+3+4=4$	$634: 4-3+6=7$
ผลบวกเลขโดดของ	$463 \to 4+6+3=4$	$463: 3-6+4=1$
ผลบวกเลขโดดของ	$643 \to 6+4+3=4$	$643: 3-4+6=5$

1.5.2 การตรวจสอบยันความถูกต้องสำหับการลบ

ตัวอย่างที่ 1 ตรวจสอบว่า $4127-2376=1751$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ ด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ดของตัวตั้งและตัวลบ

$4127: \ 7-2+1-4=2$

$2376: \ 6-7+3-2=0$

ดังนั้น $4127-2376 \ : \ 2-0=2$

คัดออกสิบเอ็ดสำหรับคำตอบ $1751: 1-5+7-1=2$ แสดงว่าถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2 ตรวจสอบว่า $65451-48769=16862$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ <u>ด้วยวิธีคัดออกเก้า</u> ของตัวตั้งและตัวลบ $6 \not{5} \not{4} 5\ 1 \to 12 \to 3$

$\not{4} 8\ 7\ 6 \not{9} \to 7$

ดังนั้น $65451-48769 \to 3-7=-4$ เนื่องจากเศษเหลือเป็นจำนวนลบต้องบวก 9

เพราะฉะนั้น $65451-48769 \to 3-7=-4 \to -4+9=5$

ใช้วิธีการตัดออกเก้า สำหรับคำตอบ $\not{1} \not{6} \not{8} 6\ \not{2} \to 5$ แสดงว่าคำตอบถูกต้อง

แต่ถ้าใช้วิธีคัดออกสิบเอ็ดของตัวตั้งและตัวลบ $65451: \ 1-5+4-5+6=1$

$48769: \ 9-6+7-8+4=6$

ดังนั้น $65451-48769: 1-6=-5 \to -5+11=6$

คัดออกสิบเอ็ดสำหรับคำตอบ $16862: 2-6+8-6+1=-1+11=10$ นั่นคือ $6 \neq 10$

ซึ่งขัดแย้งกับการตรวจยันความถูกต้องของวิธีคัดออกเก้า แสดงว่าคำตอบไม่ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ $35567-11828$ และตรวจสอบผลเฉลยยันความถูกต้อง

วิธีทำ ด้วยวิธีคัดออกเก้า

$\not{3}\ 5\ 5\ \not{6}\ 7$ การตรวจสอบยันความถูกต้อง 8

$-\ \not{1}\ \not{1}\ \not{8}\ 2\ \not{8}$ $-\ \underline{2}$

$\not{2}\ 3\ \not{7}\ 3\ \not{9} \rightarrow 6$ $\underline{6}$

สรุป ใช้การคัดออกเก้ายันความถูกต้องเป็นจริง

ด้วยวิธีคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

$3\ 5\ 5\ 6\ 7$ $35567:\ 7-6+5-5+3=4$ 4

$-\ \underline{1\ 1\ 8\ 2\ 8}$ $11828:\ 8-2+8-1+1=14:4-1=3$ $-\ \underline{3}$

$\underline{2\ 3\ 7\ 3\ 9}$ $23739:\ 9-3+7-3+2=12:2-1=1$ $\underline{1}$

สรุป ใช้การคัดออกสิบเอ็ดยันความถูกต้องเป็นจริง

1.5.3 การตรวจสอบยันความถูกต้องสำหรับการคูณ

ตัวอย่างที่ 1 ตรวจสอบว่า $243\times257=62451$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ ด้วยวิธีการคัดออกสิบเอ็ดของตัวตั้งและตัวคูณ

$243:\ 3-4+2=1$

$257:\ 7-5+2=4$ **ดังนั้น** $243\times257:1\times4=4$

คัดออกสิบเอ็ดของคำตอบ $62451:1-5+4-2+6=4$ ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2 ตรวจสอบว่า $4672\times3469=16207168$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีทำ คัดออกสิบเอ็ดของตัวตั้งและตัวคูณ

$4672:\ 2-7+6-4=-3+11=8$

$3469:\ 9-6+4-3=4$

ในที่นี้ $4672\times3469\rightarrow8\times4=32$ $32:\ 2-3=-1+11=10$

แต่คำตอบ เท่ากับ $16207168:8-6+1-7+0-2+6-1=-1+11=10$ ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 3 หาค่าของ 87614×3 และตรวจสอบผลเฉลยยันความถูกต้อง

วิธีทำ การคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

$8\ 7\ 6\ 1\ 4$ 10

$\times$ $\times$

3 3

$\underline{2\ 2\ 1\ 0\ 1}$ $4\ 1\ 8\ 3\ 2=262842$ การตรวจสอบยันความถูกต้อง $30:0-3=-3:-3+11=8$

ตัวตั้ง $87614:\ 4-1+6-7+8=10$ **ตัวคูณ** 3

ในที่นี้ $87614\times3\rightarrow10\times3=30:\ 0-3=-3:-3+11=8$

คำตอบ $262842:\ 2-4+8-2+6-2=8$

สรุป ใช้การคัดออกเลขสิบเอ็ดตรวจสอบยันความถูกต้องเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4 ผลคูณของ $94\times49=4606$ และตรวจสอบผลเฉลยยันความถูกต้อง

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

ตัวตั้ง $94\rightarrow4$

ตัวคูณ $49\rightarrow4$

คำตอบ $4606\rightarrow7$

ดังนั้น $4\times4=16\rightarrow7$

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

ตัวตั้ง $94:\ 4-9=-5$

ตัวคูณ $49:\ 9-4=5$

คำตอบ $4606:\ 6-0+6-4=8$

ดังนั้น $-5\times5=-25:-(5-2)=-3:-3+11=8$

หรือ

$9\ 4 \rightarrow 4$ ×

$4\ 9 \rightarrow 4$ ×

$4606\rightarrow7$ $\quad 16\rightarrow7$

$9\ 4$ $:4-9=-5\rightarrow-5+11=6$ 6 ×

$4\ 9$ $:9-4=5$ 5

4606 $:\ 6-0+6-4=8$ 30

$:0-3=-3+11=8$

ตัวอย่างที่ 4 ผลคูณ $504\times321=161874$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

ตัวตั้ง $504\rightarrow0$

ตัวคูณ $321\rightarrow6$

คำตอบ $161874\rightarrow9=0$

ดังนั้น $0\times6=0\rightarrow0$

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

ตัวตั้ง $504:\ 4-0+5=9$

ตัวคูณ $321:\ 1-2+3=2$

คำตอบ $161874:4-7+8-1+6-1=9$

ดังนั้น $9\times2=18:8-1=7$ สรุป <u>ผลคูณไม่ถูกต้อง</u>

ตัวอย่างที่ 5 หาผลคูณของ 84791247 ด้วย 25 และตรวจสอบยันความถูกต้อง

วิธีทำ เขียนศูนย์สองตัวที่ท้ายเลข 84791247 ได้ผลลัพธ์เป็น 8479124700

หาร 8479124700 ด้วย $4=8479124700\div4=2119781175$

ดังนั้น $84791247\times25=2119781175$

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

ตัวตั้ง $84791247\rightarrow6$

ตัวคูณ $25\rightarrow7$

คำตอบ $=2119781175\rightarrow6$

ดังนั้น $7\times6=42\rightarrow6$

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

ตัวตั้ง $84791247 : +8-4+7-9+1-2+4-7=-2$

ตัวคูณ $25 : +2-5=-3$

คำตอบ $2119781175 : +2-1+1-9+7-8+1-1+7-5=6$

ดังนั้น $(-2)\times(-3)=6$

ตัวอย่างที่ 6 ผลคูณ $3.95\times3.95\times3.95=61.629875$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

$3.95\times3.95\times3.95 \rightarrow 8\times8\times8=512 \rightarrow 8$

$61.629875 \rightarrow 8$

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

$3.95 : \ 5-9+3=-1$

$3.95\times3.95\times3.95 : \ -1\times-1\times-1=-1$

$61.629875 : \ 5-7+8-9+2-6+1-6=-12 :$

$=-12 : \ -12+11=-1$

ตัวอย่างที่ 7 ผลคูณของ $80706050403\times99999999999=807060504021929394959 7$ ถูกต้องหรือไม่

วิธีการคัดออกเก้า (Casting Out Nines)

ตัวตั้ง $80706050403 \rightarrow 6$

ตัวคูณ $99999999999 \rightarrow 0$ **คำตอบ** $807060504021929394959 7 \rightarrow 0$

ดังนั้น $6\times0=0 \rightarrow 0$

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด (Casting Out Elevens)

ตัวตั้ง $80706050403 : 3-0+4-0+5-0+6-0+7-0+8=33 : 3-3=0$

ตัวคูณ $99999999999 : 9-9+9-9+9-9+9-9+9-9+9=9$

คำตอบ $807060504021929394959 7 : \ 7-9+5-9+4-9+4-9+3-9+2-9+1-2+0-4+0-5$

$+0-6+0-7+0-8=-55=-(5-5)=0$ **ดังนั้น** $0\times2=0$

1.5.4 การตรวจสอบยันความถูกต้องสำหรับการหาร

ตัวอย่างที่ 1 กรณี $671 \div 4 = 167 + \frac{3}{4}$ **โดยการใช้วิธีการคัดออกสิบเอ็ด**

วิธีคิด เนื่องจากการหารเป็นการผกผันของการคูณ การยันความถูกต้องจึงต้องใช้สมการขั้นตอนการหารมาช่วย

กำหนดให้ ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

$$671 = 167 \times 4 + 3$$

LHS = RHS

วิธีการคัดออกสิบเอ็ด สำหรับตัวตั้ง $671: \ 1-7+6=0$

สำหรับตัวหาร $4: \ 4=4$

สำหรับผลลัพธ์ $167: \ 7-6+1=2$

สำหรับเศษเหลือ $3: \ 3$

จากสมการขั้นตอนการหาร

RHS = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ $= 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11 : 1 - 1 = 0$

LHS = ตัวตั้ง = 0 ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

กรณี $671 \div 4 = 167.75$

วิธีคิด กำหนดให้ ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์

$$671 = 167.75 \times 4$$

LHS = RHS

ใช้วิธีการคัดออกสิบเอ็ดสำหรับตัวตั้ง $671: \ 1-7+6=0$

สำหรับตัวหาร $4: \ 4=4$

สำหรับผลลัพธ์ $167.75: \ 5-7+7-6+1=0$

จากสมการขั้นตอนการหาร RHS = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ $= 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11 : 1 - 1 = 0$

LHS = ตัวตั้ง = o ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

หรือวิธีทำ จาก ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

$$671 = 4 \times 167 + 3$$

จากวิธีการคัดออกสิบเอ็ด $1-7+6 = 4 \times (7-6+1) + 3$

$$0 = 4 \times 2 + 3 = 11 : 0$$

หรือวิธีทำ จาก ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์

$$671 = 4 \times 167.75$$

จากวิธีการคัดออกสิบเอ็ด $1-7+6 = 4 \times (5-7+7-6+1) = 4 \times 0 = 0$

ตัวอย่างที่ 2 ตรวจสอบว่า $4274 \div 24$ เมื่อ ผลหารเท่ากับ 178 เศษเหลือ 2

การคัดออกสิบเอ็ด

สำหรับตัวตั้ง $4274: \ 4-7+2-4=-5+11=6$

สำหรับตัวหาร $24: \ 4-2=2$

สำหรับผลหาร $178: \ 8-7+1=2$

สำหรับเศษเหลือ $2: \ 2$

จากขั้นตอนการหาร

ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลลัพธ์ + เศษเหลือ

$\text{RHS} = 2\times 2+2=6$

LHS = 6 ดังนั้นคำตอบถูกต้อง

หรือวิธีการคัดออกสิบเอ็ดทำย่อ ๆ ได้ดังนี้:

จากสมการขั้นตอนการหาร $4274=178(24)+2$

จากวิธีคัดการออกสิบเอ็ด $4-7+2-4=8-7+1(4-2)+2$

$-5=(2)(2)+2$

แต่เศษต้องเป็นบวก ดังนั้น $-5+11=(2)(2)+2$

$6=6$

ตัวอย่างที่ 3 ตรวจสอบว่า $73521 \div 27$ เมื่อผลหาร $=2723$ เศษเหลือ 0

วิธีทำ สมการการหาร $73521=2723(27)+0$

จากวิธีการคัดออกเก้า $0=(5)(0)+0=0$

จากวิธีการคัดออกสิบเอ็ด $1-2+5-3+7=(3-2+7-2)(7-2)+0$

$8=(6)(5)+0=30$

$8=0-3=-3$ แต่เศษต้องเป็นบวก

$8=-3+11=8$ **สรุป** ผลคูณถูกต้อง